Vorlesung
Informatik III – Theoretische Informatik

Formale Sprachen, Berechenbarkeit, Komplexitätstheorie

Matthias Heizmann

Basierend auf einem Mitschrieb von Ralph Lesch*

der von Prof. Dr. Peter Thiemann im WS 2015/16 gehaltenen Vorlesung

WS 2017/18

Zuletzt aktualisiert: 2018-03-19

*ralph.lesch@neptun.uni-freiburg.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorspann: Sprachen

Vorlesung: 18.10.2017

Def. 1.1: Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von *Zeichen*. ◇

Zeichen sind hier beliebige abstrakte Symbole.

Bsp.: für Alphabete, die in dieser Vorlesung, im täglichem Umgang mit Computern oder in der Forschung an unserem Lehrstuhl eine Rolle spielen

- $\{a, \ldots, z\}$
- $\{0, 1\}$
- $\{rot, gelb, grün\}$ (Ampelfarben)
- Die Menge aller ASCII-Symbole
- Die Menge aller Statements eines Computerprogramms

Wir verwenden typischerweise den griechischen Buchstaben Σ als Namen für ein Alphabet und die lateinischen Buchstaben a, b, c als Namen für Zeichen.[1] Im Folgenden sei Σ immer ein beliebiges Alphabet.[2]

Def. 1.2: Wir nennen eine endliche Folge von Elementen aus Σ ein *Wort* und schreiben solch eine Folge immer ohne Trennsymbole wie z.B. Komma.[3] Die leere Folge nennen wir das *leere Wort*; als Konvention stellen wir das leere Wort mit dem griechischen Buchstaben ε dar.[4] Wir bezeichnen die Menge aller Wörter mit Σ^* und die Menge aller nicht leeren Wörter mit Σ^+. Die *Länge* eines Wortes, $|\cdot| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, ist die Anzahl der Elemente der Folge. ◇

Wir verwenden typischerweise u, v, w als Namen für Wörter.

Bsp.: für Wörter über $\Sigma = \{a, \ldots, z\}$

- `rambo` (Länge 5)
- `eis`, `ies` (beide Länge 3 aber ungleich)
- ε (Länge 0)

[1] Dies ist eine Konventionen analog zu den folgenden, die Sie möglicherweise in der Schule befolgten: Verwende n, m für natürliche Zahlen. Verwende α, β für Winkel in Dreiecken. Verwende A für Matrizen.

[2] Dieser Satz dient dazu, dass die Autoren dieses Skripts nicht jede Definition mit "Sei Σ ein Alphabet..." beginnen müssen.

[3] Wir schreiben also z.B. `einhorn` statt `e,i,n,h,o,r,n`.

[4] Eine analoge Konvention, die sie aus der Schule kennen: Verwende immer π als Symbol für die Kreiszahl.

Wörter lassen sich „verketten"/„hintereinanderreihen". Die entsprechende Operation heißt *Konkatenation*, geschrieben „$\cdot$" (wie Multiplikation).

Def. 1.3 (Konkatenation von Wörtern)**:** Die *Konkatenation*, $\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, ist für $u = u_1 \dots u_n \in \Sigma^*$ und $v = v_1 \dots v_m \in \Sigma^*$ definiert durch $u \cdot v = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m$ ◇

Bsp.:

- $\texttt{eis} \cdot \texttt{rambo} = \texttt{eisrambo}$
- $\texttt{rambo} \cdot \varepsilon = \texttt{rambo} = \varepsilon \cdot \texttt{rambo}$

Eigenschaften von „$\cdot$":

- assoziativ
- ε ist neutrales Element
- *nicht* kommutativ

Der Konkatenationsoperator „$\cdot$" wird oft weggelassen (ähnlich wie der Multiplikationsoperator in der Arithmetik). Ebenso können durch die Assoziativität Klammern weggelassen werden.

$w_1 w_2 w_3$ steht also auch für $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$, für $(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3$ und für $w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3)$

Bemerkung: Die Zeichenfolge $\texttt{rambo}\varepsilon$ ist *kein* Wort. Diese Zeichenfolge ist lediglich eine Notation für eine Konkatenationsoperation, die ein Wort der Länge 5 (nämlich `rambo`) beschreibt.

Wörter lassen sich außerdem *potenzieren*:

Def. 1.4: Die *Potenzierung* von Wörtern, $\cdot^{\cdot} : \Sigma^* \times \mathbb{N} \to \Sigma^*$, ist induktiv definiert durch

1. $w^0 = \varepsilon$
2. $w^{n+1} = w \cdot w^n$ ◇

Bsp.: $\texttt{eis}^3 \overset{(2.)}{=} \texttt{eis}\cdot\texttt{eis}^2 \overset{\text{zweimal } (2.)}{=} \texttt{eis}\cdot\texttt{eis}\cdot\texttt{eis}\cdot\texttt{eis}^0 \overset{(1.)}{=} \texttt{eis}\cdot\texttt{eis}\cdot\texttt{eis}\cdot\varepsilon = \texttt{eiseiseis}$

Def. 1.5: Eine *Sprache* über Σ ist eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$. ◇

Bsp.:

- $\{\texttt{eis}, \texttt{rambo}\}$
- $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Binärcodierung einer Primzahl}\}$
- $\{\}$ (die „leere Sprache“)
- $\{\varepsilon\}$ (ist verschieden von der leeren Sprache)
- Σ^*

Sämtliche Mengenoperationen sind auch Sprachoperationen, insbesondere Schnitt ($L_1 \cap L_2$), Vereinigung ($L_1 \cup L_2$), Differenz ($L_1 \setminus L_2$) und Komplement ($\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$).

Weitere Operationen auf Sprachen sind Konkatenation und Potenzierung, sowie der *Kleene-Abschluss*.

Def. 1.6 (Konkatenation und Potenzierung von Sprachen)**:** Seien $U, V \subseteq \Sigma^*$. Dann ist die *Konkatenation* von U und V definiert durch

$$U \cdot V = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$

und die *Potenzierung* von U induktiv definiert durch

1. $U^0 = \{\varepsilon\}$
2. $U^{n+1} = U \cdot U^n$ ◇

Bsp.:

- $\{\texttt{eis}, \varepsilon\} \cdot \{\texttt{rambo}\} = \{\texttt{eisrambo}, \texttt{rambo}\}$
- $\{\texttt{eis}, \varepsilon\} \cdot \{\} = \{\}$
- $\{\}^0 = \{\varepsilon\}$
- $\{\}^4 = \{\}$
- $\{\texttt{eis}, \varepsilon\}^2 = \{\varepsilon, \texttt{eis}, \texttt{eiseis}\}$

Wie bei der Konkatenation von Wörtern dürfen wir den Konkatenationsoperator auch weglassen.

Def. 1.7 (Kleene-Abschluss, Kleene-Stern)**:** Sei $U \subseteq \Sigma^*$. Der *Kleene-Abschluss* ist definiert als

1. $U^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n \quad [\ni \varepsilon]$
2. $U^+ = \bigcup_{n \geq 1} U^n$ ◇

2 Reguläre Sprachen und endliche Automaten

Vorlesung: 20.10.17

Wie können wir potentiell unendlich große Mengen von Wörtern darstellen? Eine Lösung für dieses Problem sahen wir bereits im vorherigen Kapitel, als wir die (unendlich große) Menge der binär codierten Primzahlen mit Hilfe der folgenden Zeile darstellten.

$$L_{\mathsf{prim}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Binärcodierung einer Primzahl}\}$$

Ein weiteres Beispiel ist die folgende Zeile.

$$L_{\mathsf{even}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist gerade. }\}$$

Eine häufig interessante Fragestellung für ein gegebenes Wort w und eine Sprache L ist: „Ist w in L enthalten?“ (Also: „Gilt $w \in L$?“) Wir nennen dieses Entscheidunsproblem das *Wortproblem*. Eine konkrete Instanz des Wortproblems wäre z.B. „$1100101 \in L_{\mathsf{prim}}$?“ oder „$1100101 \in L_{\mathsf{even}}$?“

Die obige Darstellung der unendlichen Mengen L_{prim} und L_{even} ist zwar sehr kompakt, wir können daraus aber nicht direkt ein Vorgehen zur Lösung des Wortproblems ableiten. Wir müssen zunächst verstehen, was die Begriffe „Binärcodierung“, „Primzahl“ oder „gerade Anzahl“ bedeuten und für L_{prim} und L_{even} jeweils einen Algorithmus zur Entscheidung entwickeln.

In diesem Kapitel werden wir mit *endlichen Automaten* einen weiteren Formalismus kennenlernen, um (potentiell unendlich große) Mengen von Wörtern darzustellen. Ein Vorteil dieser Darstellung ist, dass es einen einheitlichen und effizienten Algorithmus für das Wortproblem gibt. Wir werden aber auch sehen, dass sich nicht jede Sprache (z.B. L_{prim}) mit Hilfe eines endlichen Automaten darstellen lässt.

2.1 Endliche Automaten

Wir beschreiben zunächst informell die Bestandteile eines endlichen Automaten:

Endliches Band (read-only; jede Zelle enthält ein $a_i \in \Sigma$; der Inhalt des Bands ist das *Eingabewort* bzw. die *Eingabe*)

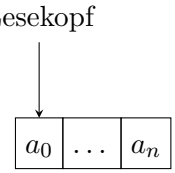


Abb. 1: Endliches Band

Lesekopf

- Der *Lesekopf* zeigt auf ein Feld des Bands, oder hinter das letzte Feld.
- Er bewegt sich feldweise nach rechts; andere Bewegungen (Vor- bzw. Zurückspulen) sind nicht möglich.
- Wenn er hinter das letzte Zeichen zeigt, *stoppt* der Automat. Er muss sich nun „entscheiden“ ob er das Wort *akzeptiert* oder nicht.

Zustände q aus *endlicher* Zustandsmenge Q

Startzustand $q^{\mathsf{init}} \in Q$

Akzeptierende Zustände $F \subseteq Q$

Transitionsfunktion Im Zustand q beim Lesen von a gehe in Zustand $\delta(q) = q'$.

Der endliche Automat akzeptiert eine Eingabe, falls er in einem akzeptierenden Zustand stoppt.

Bsp. 2.1: Aufgabe:
„Erkenne alle Stapel von Macarons, in denen höchstens ein grünes Macaron vorkommt.“


[5]

Ein passendes Alphabet wäre $\Sigma = \{\texttt{grün}, \texttt{nicht-grün}\}$. Wir definieren die folgenden Zustände. (Die Metapher hier ist: „wenn ich mehr als ein grünes Macaron esse, wird mir übel, und das wäre nicht akzeptabel“.)

Zustand	Bedeutung
q_0	„alles gut“
q_1	„mir wird schon flau“
q_2	„mir ist übel“

Der Startzustand ist q_0. Akzeptierende Zustände sind q_0 und q_1. Die Transitionsfunktion δ ist durch die folgende Tabelle gegeben.

[5] Von links nach rechts:
By Mariajudit - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=48726001
By Michelle Naherny - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=44361114
By Keven Law - originally posted to Flickr as What's your Colour???, CC BY-SA 2.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6851868

	`grün`	`nicht-grün`	
q_0	q_1	q_0	wechsle nach q_1 falls `grün`, ansonsten verweile
q_1	q_2	q_1	wechsle nach q_2 falls `grün`, ansonsten verweile
q_2	q_2	q_2	verweile, da es nichts mehr zu retten gibt

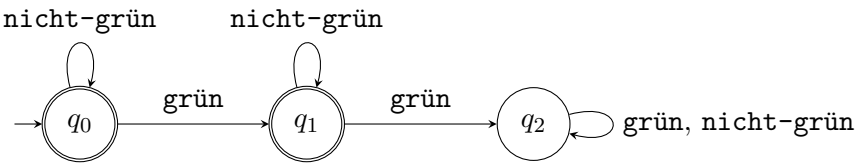
Def. 2.1 (DEA)**:** Ein *deterministischer endlicher Automat (DEA)*, (DFA $\hat{=}$ deterministic finite automaton) ist ein 5-Tupel

$$\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F).$$

Dabei ist

- Σ ein Alphabet,
- Q eine *endliche* Menge, deren Elemente wir *Zustände* nennen,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ eine Funktion, die wir *Transitionsfunktion* nennen,
- $q^{\mathsf{init}} \in Q$ ein Zustand, den wir *Startzustand* nennen und
- $F \subseteq Q$ eine Teilmenge der Zustände, deren Elemente wir *akzeptierende* Zustände nennen. ◇

DEAs lassen sich auch graphisch darstellen. Dabei gibt man für den Automaten einen gerichteten Graphen an. Die Knoten des Graphen sind die Zustände, und mit Zeichen beschriftete Kanten zeigen, welchen Zustandsübergang die Transitionsfunktion für das nächste Zeichen erlaubt. Der Startzustand ist mit einem unbeschrifteten Pfeil markiert, akzeptierende Zustände sind doppelt eingekreist. Hier ist die graphische Darstellung von $A_{\texttt{Macaron}}$ aus Beispiel 2.1:



Die folgenden beiden Definitionen erlauben uns mit Hilfe eines DEA eine Sprache zu charakterisieren.

Def. 2.2: Die *induktive Erweiterung* von $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ auf Wörter, $\tilde{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$, ist (induktiv) definiert durch

1. $\tilde{\delta}(q, \varepsilon) = q$ (Wortende erreicht)
2. $\tilde{\delta}(q, aw) = \tilde{\delta}(\delta(q, a), w)$ (Rest im Folgezustand verarbeiten) ◇

Def. 2.3: Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von $\mathcal{A}$ *akzeptiert*, falls $\tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) \in F$. Die *von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache*, geschrieben $L(\mathcal{A})$, ist die Menge aller Wörter, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden. D.h.,

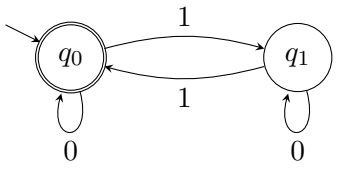
$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) \in F\}.$$

Eine durch einen DEA akzeptierte Sprache heißt *regulär*. ◇

Bsp. 2.2: Ein möglicher DEA für die Sprache

$$L_{\mathsf{even}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist gerade. }\}$$

aus der Einleitung dieses Kapitels hat die folgende graphische Repräsentation.



Frage: Gegeben seien zwei reguläre Sprachen L_1, L_2 über einem gemeinsamen Alphabet Σ; ist dann auch der Schnitt $L_1 \cap L_2$ eine reguläre Sprache? Wir beantworten diese Frage mit dem folgenden Satz.

Satz 2.1: Reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter der Schnittoperation. (D.h. für zwei gegebene reguläre Sprachen L_1, L_2 über Σ ist auch der Schnitt $L_1 \cap L_2$ eine reguläre Sprache.)

Beweis: [6] Da L_1 und L_2 regulär sind, gibt es zwei DEAs $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_1^{\mathsf{init}}, F_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_2^{\mathsf{init}}, F_2)$ mit $L_1 = L(A_1)$ und $L_2 = L(A_2)$. Wir konstruieren nun zunächst den *Produktautomaten für Schnitt* $A_\cap = (\Sigma, Q_\cap, \delta_\cap, q_\cap^{\mathsf{init}}, F_\cap)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} Q_\cap &= Q_1 \times Q_2 \\ \delta_\cap((q_1, q_2), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \ , \quad \text{für alle } a \in \Sigma \\ q_\cap^{\mathsf{init}} &= (q_1^{\mathsf{init}}, q_2^{\mathsf{init}}) \\ F_\cap &= F_1 \times F_2 \end{aligned}$$

Anschließend zeigen wir, dass $L(A_\cap) = L(A_1) \cap L(A_2)$ gilt. Hierfür zeigen wir zunächst via Induktion über die Länge von w, dass für alle $w \in \Sigma^*$, für alle $q_1 \in Q_1$ und für alle $q_2 \in Q_2$ die folgende Gleichung gilt.

$$\tilde{\delta}_\cap((q_1, q_2), w) = (\tilde{\delta}_1(q_1, w), \tilde{\delta}_2(q_2, w))$$

[6] Dieser erste Beweis ist außergewöhnlich detailliert. In den folgenden Beweisen werden wir einfache Umformungen zusammenfassen.

Der Induktionsanfang für $n = 0$ folgt dabei direkt aus Def. 2.2, da ε das einzige Wort der Länge 0 ist.

$$\tilde{\delta}_\cap((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$$

Den Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ zeigen wir mit Hilfe der folgenden Umformungen, wobei $a \in \Sigma$ ein beliebiges Zeichen und $w \in \Sigma^n$ ein beliebiges Wort der Länge n ist.

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_\cap((q_1, q_2), aw) &\overset{\text{Def. 2.2}}{=} \tilde{\delta}_\cap(\delta_\cap((q_1, q_2), a), w) \\
&\overset{\text{Def. } \delta_\cap}{=} \tilde{\delta}_\cap((\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)), w) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (\tilde{\delta}_1(\delta_1(q_1, a), w), \tilde{\delta}_2(\delta_2(q_2, a), w)) \\
&\overset{\text{Def. 2.2}}{=} (\tilde{\delta}_1(q_1, aw), \tilde{\delta}_2(q_2, aw))
\end{aligned}$$

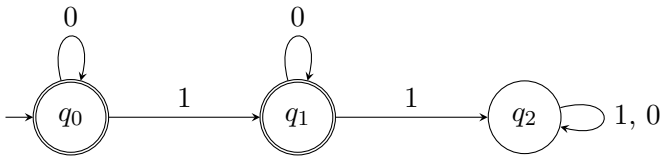
Schließlich zeigen wir $L(A_\cap) = L(A_1) \cap L(A_2)$ mit Hilfe der folgenden Umformungen für ein beliebiges $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned}
w \in L(A_\cap) &\overset{\text{Def. 2.3}}{\underset{\mathsf{gdw}}{}} \tilde{\delta}_\cap(q_\cap^{\mathsf{init}}, w) \in F_\cap \\
&\overset{\text{Def. } q_\cap^{\mathsf{init}}}{\underset{\mathsf{gdw}}{}} \tilde{\delta}_\cap((q_1^{\mathsf{init}}, q_2^{\mathsf{init}}), w) \in F_\cap \\
&\underset{\mathsf{gdw}}{} (\tilde{\delta}_1(q_1^{\mathsf{init}}, w), \tilde{\delta}_2(q_2^{\mathsf{init}}, w)) \in F_\cap \\
&\overset{\text{Def. } F_\cap}{\underset{\mathsf{gdw}}{}} \tilde{\delta}_1(q_1^{\mathsf{init}}, w) \in F_1 \text{ und } \tilde{\delta}_2(q_2^{\mathsf{init}}, w) \in F_2 \\
&\overset{\text{Def. 2.3}}{\underset{\mathsf{gdw}}{}} w \in L(A_1) \text{ und } w \in L(A_2)
\end{aligned}$$

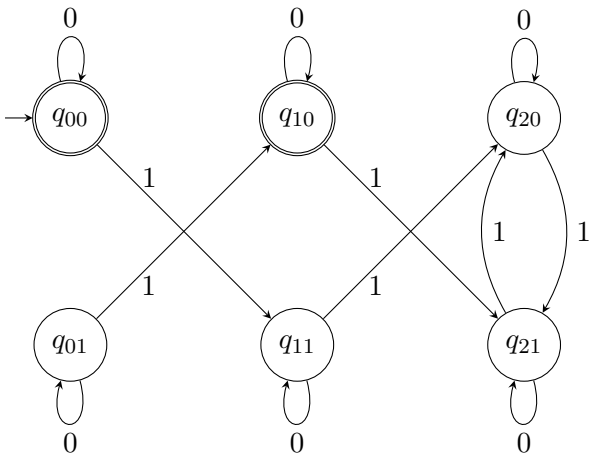
□

Vorlesung: 25.10.17

Im folgenden Beispiel sei A_1 der DEA über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, dessen graphische Repräsentation nahezu mit $A_{\texttt{Macaron}}$ identisch ist.



Bsp. 2.3: Der Produktautomat für Schnitt von A_1 und A_{even} hat die folgende graphische Repräsentation, wobei wir um Platz zu sparen „q_{ij}“ statt „(q_i, q_j)“ schreiben.



2.2 Minimierung endlicher Automaten

Beobachtung: Der Zustand q_{01} im Beispiel 2.3 scheint nutzlos. Wir charakterisieren diese „Nutzlosigkeit“ formal wie folgt.

Def. 2.4: Ein Zustand $q \in Q$ heißt *erreichbar*, falls ein $w \in \Sigma^*$ existiert, sodass $\hat{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) = q$. ◇

Bemerkung: Die Menge der erreichbaren Zustände kann mit dem folgenden Verfahren in $O(|Q| * |\Sigma|)$ berechnet werden.

- Fasse $\mathcal{A}$ als Graph auf.
- Wende Tiefensuche an und markiere dabei alle besuchten Zustände.
- Die markierten Zustände bilden die Menge der erreichbaren Zustände.

Beobachtung: Auch nach dem Entfernen der nicht erreichbaren Zustände q_{01} und q_{10} scheint der DEA aus Bsp. 2.3 unnötig groß zu sein. Das Verhalten des DEA in den Zuständen q_{11}, q_{20} und q_{21} ist sehr ähnlich. Wir charakterisieren diese „Ähnlichkeit“ formal wie folgt.

Def. 2.5: Wir nennen zwei Zustände $p, q \in Q$ eines DEA *äquivalent*, geschrieben $p \equiv q$, falls

$$\forall w \in \Sigma^* : \tilde{\delta}(p, w) \in F \text{ gdw } \tilde{\delta}(q, w) \in F$$ ◇

Bsp. 2.4: Für Bsp. 2.3 gilt: Die Zustände q_{11}, q_{20} und q_{21} sind paarweise äquivalent. Die Zustände q_{00} und q_{10} sind äquivalent. Keine weiteren Zustandspaare sind äquivalent.

Geschrieben als Menge von Paaren sieht die Relation $\equiv \subseteq Q \times Q$ also wie folgt aus:

$$\{\,(q_{00}, q_{10}), (q_{10}, q_{00}),\ (q_{11}, q_{20}), (q_{20}, q_{11}),\ (q_{20}, q_{21}), (q_{21}, q_{20}),\ (q_{21}, q_{11}), (q_{11}, q_{21})\,\}$$

2.2.1 Exkurs: Äquivalenzrelationen

Sie haben Äquivalenzrelationen bereits in „Mathematik II für Studierende der Informatik“[7] kennengelernt. Dieser kurze Exkurs wiederholt die für unsere Vorlesung relevanten Definitionen. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Relation* R über X ist eine Teilmenge des Produkts $X \times X$ (d.h. $R \subseteq X \times X$).

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- *reflexiv*, wenn $\forall x \in X\colon (x, x) \in R$,
- *symmetrisch*, wenn $\forall x, y \in X\colon (x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R$,
- *transitiv*, wenn $\forall x, y, z \in X\colon (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R$.

Bsp. 2.5: Im Folgenden interessieren wir uns nur Relationen, die alle drei Eigenschaften erfüllen, aber die folgenden Beispiele sollen helfen, sich mit diesen Eigenschaften vertraut zu machen.

	reflexiv	symmetrisch	transitiv
„gewinnt“ bei Schere, Stein, Papier	nein	nein	nein
$(\mathbb{N}, <)$	nein	nein	ja
$(\mathbb{N}, \neq)$	nein	ja	nein
die leere Relation	nein	ja	ja
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \leq 3\}$	ja	nein	nein
$(\mathbb{N}, \leq)$	ja	nein	ja
direkte genetische Verwandtschaft	ja	ja	nein
logische Äquivalenz von Formeln	ja	ja	ja

Bemerkung: Wir können kein Beispiel für eine nicht leere, symmetrische, transitive Relation finden, die nicht reflexiv ist. Für nicht leere Relationen folgt Reflexivität bereits aus Symmetrie und Transitivität: $(a, b) \in R \overset{\text{sym}}{\Rightarrow} (b, a) \in R \overset{\text{trans}}{\Rightarrow} (a, a) \in R$.

[7] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/ss17/matheII.html`

Def. 2.6: Eine Äquivalenzrelation R ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Für eine Äquivalenzrelation R und ein $x \in X$ nennen wir die Menge $\{y \in X \mid (y, x) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse* von x und verwenden die Notation $[x]_R$ für diese Menge. Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Relation gemeint ist, dürfen wir das Subskript $\cdot_R$ auch weglassen und schreiben nur $[x]$.

Wenn wir eine Äquivalenzklasse mit Hilfe der Notation $[x]_R$ beschreiben, nennen wir x den *Repräsentanten* dieser Äquivalenzklasse.

Wir nennen die Anzahl der Äquivalenzklassen von R den *Index* von R. ◇

Zwei Fakten über eine beliebige Äquivalenzrelation R (ohne Beweis).

Fakt 1 Die Äquivalenzklassen von R sind paarweise disjunkt.

Fakt 2 Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist die Menge X.

Hiermit endet der Exkurs zu Äquivalenzrelationen; wir wollen mit diesem Wissen die oben definierte Relation $\equiv \subseteq Q \times Q$ genauer analysieren.

Lemma 2.2: Die Relation „$\equiv$“ ist eine *Äquivalenzrelation.*

Beweis: Die Relation $\equiv$ ist offensichtlich reflexiv. Die Symmetrie und Transitivität von $\equiv$ folgt aus der Symmetrie und Transitivität der logischen Interpretation von „genau dann, wenn“ (gdw). □

Bsp. 2.6: Für den DEA aus Bsp. 2.3 hat die Relation $\equiv$ drei Äquivalenzklassen.[8]

$$[q_{00}] = \{q_{00}, q_{10}\},$$
$$[q_{01}] = \{q_{01}\},$$
$$[q_{11}] = \{q_{11}, q_{20}, q_{21}\}$$

Idee: „Verschmelze“ alle Zustände aus einer Äquivalenzklasse zu einem einzigen Zustand. Bedenken: Bei einem DEA hat jeder Zustand hat für jedes Zeichen einen Nachfolger. Wenn wir Zustände verschmelzen, könnte es mehrere Nachfolger geben und das Resultat wäre kein wohldefinierter DEA mehr.

Das folgende Lemma zeigt, dass unsere Bedenken nicht gerechtfertigt sind. Sind zwei Zustände äquivalent, so sind auch für jedes Zeichen ihre Nachfolger äquivalent.

[8] Den Zustand q_{11} als Repräsentanten für die dritte Äquivalenzklasse zu wählen ist eine völlig willkürliche Entscheidung. Wir könnten genauso gut q_{20} oder q_{21} wählen.

Lemma 2.3: Für alle $p, q \in Q$ gilt:

$$p \equiv q \quad \Rightarrow \quad \forall a \in \Sigma : \delta(p,a) \equiv \delta(q,a)$$

Beweis:

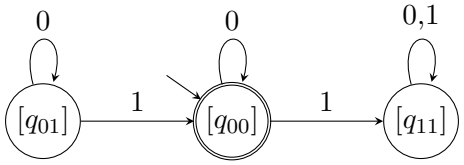
$$\begin{array}{lll} p \equiv q & \text{gdw} & \forall w \in \Sigma^* : \tilde{\delta}(p,w) \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}(q,w) \in F \\ & \text{gdw} & (p \in F \Leftrightarrow q \in F) \wedge \forall a \in \Sigma : \forall w \in \Sigma^* : \tilde{\delta}(p,aw) \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}(q,aw) \in F \\ & \text{impliziert} & \forall a \in \Sigma : \forall w \in \Sigma^* : \tilde{\delta}(\delta(p,a),w) \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}(\delta(q,a),w) \in F \\ & \text{gdw} & \forall a \in \Sigma : \delta(p,a) \equiv \delta(q,a) \end{array}$$ □

Wir formalisieren das „Verschmelzen“ von Zuständen wie folgt.

Def. 2.7: Der Äquivalenzklassenautomat $\mathcal{A}_\equiv = (Q_\equiv, \Sigma, \delta_\equiv, q^{\mathsf{init}}{}_\equiv, F_\equiv)$ zu einem DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ ist bestimmt durch:

$$Q_\equiv = \{[q] \mid q \in Q\} \qquad \delta_\equiv([q],a) = [\delta(q,a)]$$
$$q^{\mathsf{init}}_\equiv = [q^{\mathsf{init}}] \qquad F_\equiv = \{[q] \mid q \in F\}$$ ◇

Bsp. 2.7: Der Äquivalenzklassenautomat $\mathcal{A}_\equiv$ zum DEA aus Bsp. 2.3 hat das folgende Zustandsdiagramm.



Satz 2.4: Der Äquivalenzklassenautomat ist wohldefiniert und $L(\mathcal{A}_\equiv) = L(\mathcal{A})$.

Beweis:

1. Wohldefiniert: Es gilt zu zeigen, dass $\delta_\equiv([q],a) = [\delta(q,a)]$ nicht abhängig von der Wahl des Repräsentanten $q \in [q]$ ist. Dies folgt direkt aus Lemma 2.3.
2. $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_\equiv)$: Zunächst zeigen wir via Induktion über die Länge von w, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $q \in Q$ die folgende Äquivalenz gilt.

$$\tilde{\delta}(q,w) \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}_\equiv([q],w) \in F_\equiv$$

I.A. ($n = 0$, also $w = \varepsilon$): $\tilde{\delta}(q,\varepsilon) = q \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}_\equiv([q],\varepsilon) = [q] \in F_\equiv$

I.S.: $(n \rightsquigarrow n+1)$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(q, aw) \in F &\iff \tilde{\delta}(\delta(q,a), w) \in F \\ &\overset{I.V.}{\iff} \tilde{\delta}_{\equiv}([\delta(q,a)], w) \in F_{\equiv} \\ &\iff \tilde{\delta}_{\equiv}(\delta_{\equiv}([q], a), w) \in F_{\equiv} \\ &\iff \tilde{\delta}_{\equiv}([q], aw) \in F_{\equiv}\end{aligned}$$

Mir Hilfe dessen zeigen wir nun $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_{\equiv})$. Sei $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned}w \in L(\mathcal{A}) &\iff \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) \in F \\ &\iff \tilde{\delta}_{\equiv}([q^{\mathsf{init}}], w) \in F_{\equiv} \\ &\iff w \in L(\mathcal{A}_{\equiv})\end{aligned}$$ □

In den Übungen werden wir ein Verfahren mit Laufzeit $O(|Q|^4 \cdot |\Sigma|)$ zur Konstruktion des Äquivalenzklassenautomaten kennenlernen. Es gibt aber auch schnellere Verfahren. Mit dem Algorithmus von Hopcroft kann $\mathcal{A}_{\equiv}$ in $O(|Q||\Sigma| \log |Q|)$ erzeugt werden.

Wir werden später ($\rightarrow$ Satz von Myhill-Nerode) sehen, dass $\mathcal{A}_{\equiv}$ der kleinste DEA ist, der $L(\mathcal{A})$ akzeptiert.

Vorlesung: 27.10.17

Def. 2.8: Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ heißt *rechtskongruent*, falls

$$(u, v) \in R \quad \Rightarrow \quad \forall w \in \Sigma^* : (u \cdot w, v \cdot w) \in R.$$ ◇

Motivation:[9] In weiteren Verlauf dieses Unterkapitels wollen wir reguläre Sprachen charakterisieren. Informell ist die Idee dieser Charakterisierung die folgende:

Angenommen, wir möchten für eine gegebene Sprache L einen DEA $\mathcal{A}$ konstruieren. Angenommen, wir haben bereits einen ersten Entwurf gemacht und in diesem führen sowohl das Wort $u \in \Sigma^*$ als auch das Wort $v \in \Sigma^*$ in den Zustand q_{42} (formal: $\tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, v) = q_{42}$).

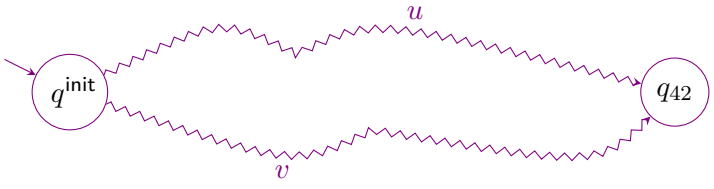


Abb. 2: Schematische Darstellung eines DEA, mit $\tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, v) = q_{42}$

[9] Dieser lilafarbene Abschnitt wurde aufgrund der Fragestunde vom 22.12.2017 nachträglich eingefügt.

- Angenommen, es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$, sodass die Äquivalenz $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$ nicht gilt. Dann wissen wir, dass unser Entwurf noch einen Fehler enthält und wir dafür sorgen müssen, dass der DEA nicht sowohl von u als auch von v in q_{42} überführt wird.
- Angenommen, es gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$, dass $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Dann wissen wir, dass es eine gute Idee war, den Automaten mit u und v in den gleichen Zustand zu führen.

Angenommen, wir finden nicht nur für zwei Wörter u, v ein Wort w, sodass die Äquivalenz $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$ nicht gilt, sondern wir finden solch ein w für jedes Paar aus einer unendlich großen Menge von Wörtern U.

$$\text{(Formal: } \forall u, v \in U : u \neq v \Rightarrow \exists w^{uv} \in \Sigma^* : \neg(uw^{uv} \in L \Leftrightarrow vw^{uv} \in L)\text{)}$$

Dann wissen wir, dass all unsere Reparaturversuche hoffnungslos sind, denn der DEA $\mathcal{A}$ bräuchte für jedes $u \in U$ einen eigenen Zustand. Doch ein DEA darf nur endlich viele Zustände haben. Die Sprache L kann also nicht regulär sein.

Im weiteren Verlauf des Unterkapitels werden wir genau diese Überlegungen formal ausarbeiten.

Bsp. 2.8: Für einen DEA $\mathcal{A}$ definiere

$$R_{\mathcal{A}} = \{(u, v) \mid \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, v)\}.$$

Beobachtung 1 $R_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Dies folgt daraus, dass „=“ eine Äquivalenzrelation ist.

Beobachtung 2 $R_{\mathcal{A}}$ ist rechtskongruent.

Dies wird in den Übungen bewiesen.

Beobachtung 3 Wir haben pro Zustand, der von q^{init} erreichbar ist, genau eine Äquivalenzklasse. Der Index von $R_{\mathcal{A}}$ ist also die Anzahl der erreichbaren Zustände.

Für den DEA aus Bsp. 2.3 hat $R_{\mathcal{A}}$ die folgenden Äquivalenzklassen.

$$\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
[1] &= \{0^n 1 0^m \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\
[11] &= \{w \mid \text{Anzahl von Einsen in } w \text{ ist gerade und} \geq 2\} \\
[111] &= \{w \mid \text{Anzahl von Einsen in } w \text{ ist ungerade und} \geq 2\}
\end{aligned}$$

Def. 2.9: Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die *Nerode-Relation* wie folgt definiert.

$$R_L = \{(u, v) \mid \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L\} \qquad \diamond$$

Beobachtung 1 Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Dies folgt daraus, dass „⇔“ (Biimplikation, „genau dann, wenn“) eine Äquivalenzrelation ist.

Beobachtung 2 Die Nerode-Relation ist rechtskongruent.

Beweis: Sei $(u, v) \in R_L$. Zeige $\forall w \in \Sigma^* : (uw, vw) \in R_L$. Wir führen diesen Beweis via Induktion über die Länge von w.
I.A. $(n = 0)$ Für $w = \varepsilon$ ist $(u\varepsilon, v\varepsilon) = (u, v) \in R_L$.
I.S. $(n \rightsquigarrow n + 1)$ Betrachte mit $w = w'a$ ein beliebiges Wort der Länge n. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann auch $(uw', vw') \in R_L$.

$$
\begin{array}{lll}
(uw', vw') \in R_L & \overset{\text{Def. } R_L}{\text{gdw}} & \forall z \in \Sigma^* : uw'z \in L \Leftrightarrow vw'z \in L \\
& \overset{\text{zerlege } z=az'}{\text{impliziert}} & \forall a \in \Sigma, z' \in \Sigma^* : uw'az' \in L \Leftrightarrow vw'az' \in L \\
& \overset{\text{Def. } R_L}{\text{impliziert}} & (uw'a, vw'a) \in R_L
\end{array}
$$

□

Bsp. 2.9: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{vorletztes Zeichen von } w \text{ ist } 1\}$ hat die folgenden Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation.

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \{w \mid w \text{ endet mit } 00\} \cup \{\varepsilon, 0\} \\
[1] &= \{w \mid w \text{ endet mit } 01\} \cup \{1\} \\
[10] &= \{w \mid w \text{ endet mit } 10\} \\
[11] &= \{w \mid w \text{ endet mit } 11\}
\end{aligned}
$$

Bsp. 2.10: Für ein beliebiges Alphabet Σ gilt:

1. Die Sprache $L = \{\varepsilon\}$ hat genau zwei Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation. Eine Äquivalenzklasse ist $\{\varepsilon\}$, die andere ist Σ^+.
2. Die Sprache $L = \{\}$ hat genau eine Äquivalenzklasse (nämlich Σ^*) bezüglich der Nerode-Relation.

Bsp. 2.11: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Die Sprache $L_{\text{centered}} = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat bezüglich der Nerode-Relation die folgende Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[w'] \mid w' \text{ ist Präfix eines Worts } w \in L_{\text{centered}}\} \cup \{[11]\}$$

Dabei gilt, dass für je zwei verschiedene $k \in \mathbb{N}$ auch die Äquivalenzklassen $[0^k 1]$ verschieden sind. Somit gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen.

Bemerkung: Die Äquivalenzklasse [11] enthält alle Wörter, die kein Präfix eines Worts aus L_{centered} sind.

Bsp.: Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$ hat bezüglich der Nerode-Relation die folgende Menge von Äquivalenzklassen:[10]

$$\{[w] \mid \#_a(w) - \#_b(w) = k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Satz 2.5 (Myhill und Nerode)**:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einem DEA akzeptiert.
2. L ist Vereinigung die von Äquivalenzklassen einer rechtskongruenten Äquivalenzrelation mit *endlichem* Index.
3. Die Nerode-Relation R_L hat *endlichen* Index.

Beweis: Wir beweisen die paarweise Äquivalenz in drei Schritten:

$$(1) \Rightarrow (2), \quad (2) \Rightarrow (3) \quad \text{und} \quad (3) \Rightarrow (1)$$

(1) ⇒ (2) Sei $\mathcal{A}$ ein DEA mit

$$L(\mathcal{A}) = \{w \mid \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) \in F\} = \bigcup_{q \in F} \{w \mid \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) = q\}.$$

Nun sind $\{w \mid \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, w) = q\}$ genau die Äquivalenzklassen der Relation $R_{\mathcal{A}}$ aus Bsp. 2.8, einer rechtskongruenten Äquivalenzrelation. Der Index ist die Anzahl der erreichbaren Zustände und somit endlich: $\text{Index}(R_{\mathcal{A}}) \leq |Q| < \infty$.

(2) ⇒ (3) Sei R einer rechtskongruente Äquivalenzrelation mit endlichem Index, sodass L die Vereinigung von R-Äquivalenzklassen ist.

Es genügt zu zeigen, dass die Nerode-Relation R_L eine Obermenge von R ist.[11]

$$\begin{aligned}
(u,v) \in R \quad &\Rightarrow \quad u \in L \Leftrightarrow v \in L, \quad \text{da } L \text{ Vereinigung von Äquivalenzklassen ist} \\
&\Rightarrow \quad \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L, \quad \text{da } R \text{ rechtskongruent} \\
&\Rightarrow \quad (u,v) \in R_L, \quad \text{nach Definition der Nerode-Relation}
\end{aligned}$$

Es gilt also $R \subseteq R_L$ und somit $\text{Index}(R_L) \leq \text{Index}(R) < \infty$.

[10] Dieses Beispiel wurde aufgrund der Fragestunde vom 22.12.2017 nachträglich eingefügt.

[11] Zur Erklärung: Falls $R \subseteq R_L$, dann gilt $\text{Index}(R) \geq \text{Index}(R_L)$. Intuitiv: Je mehr Elemente eine Äquivalenzrelation R enthält, desto mehr Elemente sind bzgl. dieser Relation äquivalent, d.h. desto weniger unterschiedliche Äquivalenzklassen gibt es.

(3) ⇒ (1) Gegeben R_L, konstruiere $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$

- $Q = \{[w]_{R_L} \mid w \in \Sigma^*\}$ endlich, da $\text{Index}(R_L)$ endlich
- $\delta([w], a) = [wa]$ wohldefiniert, da R_L rechtskongruent
- $q^{\mathsf{init}} = [\varepsilon]$
- $F = \{[w] \mid w \in L\}$

Wir wollen nun $L(\mathcal{A}) = L$ zeigen. Dafür beweisen wir zunächst via Induktion über die Länge von w die folgende Eigenschaft.

$$\forall w \in \Sigma^* : \forall v \in \Sigma^* : \tilde{\delta}([v], w) = [v \cdot w]$$

I.A. ($w = \varepsilon$): $\tilde{\delta}([v], \varepsilon) = [v] = [v \cdot \varepsilon]$

I.S. Sei $w = aw'$ beliebiges Wort der Länge $n + 1$.

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}([v], aw') & = & \tilde{\delta}(\delta([v], a), w') \\ & = & \tilde{\delta}([v \cdot a], w') \\ & \overset{\text{I.V.}}{=} & [v \cdot a \cdot w'] \\ & = & [v \cdot \underbrace{aw'}_{=w}] \end{array}$$

Nun zeigen wir $L(\mathcal{A}) = L$ wie folgt:

$$\begin{array}{lll} w \in L(\mathcal{A}) & \text{gdw} & \tilde{\delta}([\varepsilon], w) \in F \\ & \text{gdw} & [w] \in F, \quad \text{(via Induktion gezeigte Eigenschaft für } v = \varepsilon) \\ & \text{gdw} & w \in L \end{array}$$ □

Vorlesung: 3.11.16

Korollar 2.5: Der im Beweisschritt (3) ⇒ (1) konstruierte Automat $\mathcal{A}$ ist ein minimaler Automat (bzgl. der Zustandsanzahl) für eine reguläre Sprache L. ◇

Beweis: Sei $\mathcal{A}'$ ein *beliebiger* DEA mit $L(\mathcal{A}') = L$.

Aus „1 ⇒ 2“ wissen wir, dass $\text{Index}(R_{\mathcal{A}'}) \leq |Q'|$ gilt.

Aus „2 ⇒ 3“ wissen wir, dass $R_{\mathcal{A}'} \subseteq R_L$ und somit $\text{Index}(R_L) \leq \text{Index}(R_{\mathcal{A}'})$ gilt.

In „3 ⇒ 1“ definieren wir A, sodass $|Q| = \text{Index}(R_L) \leq \text{Index}(R_{\mathcal{A}}) \leq |Q'|$ gilt.

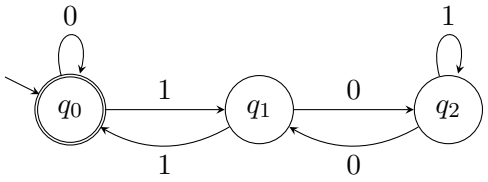
Für einen beliebigen DEA A' ist $|Q|$ also nie größer als $|Q'|$. □

2.3 Pumping Lemma (PL) für reguläre Sprachen

Welche interessanten Eigenschaften haben reguläre Sprachen?

Notation: Sei bin : $\{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ die Decodierung von Bitstrings in natürliche Zahlen; z.B. $\text{bin}(101) = 5$, $\text{bin}(\varepsilon) = 0$.

Bsp. 2.12: Betrachte den folgenden DEA, der die Sprache der Binärcodierung von durch drei teilbaren Zahlen akzeptiert: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{bin}(w) \equiv_3 0\}$



Beobachtungen:

- Es gilt offensichtlich, dass $11 \in L$.
- Es gilt auch, dass $1\underline{00}1 \in L$.
- Der Automat hat eine Schleife bei $\tilde{\delta}(q_1, 00) = q_1$, die mehrfach „abgelaufen“ werden kann, ohne die Akzeptanz zu beeinflussen.
- Also gilt auch $100001 \in L$.
- Im Allgemeinen gilt $\forall i \in \mathbb{N} : 1(00)^i 1 \in L$.

Verdacht: Alle „langen“ Wörter lassen sich in der Mitte „aufpumpen“. Wir formalisieren diesen Verdacht im folgenden Lemma.

Lemma 2.6 (Pumping Lemma)**:** Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\exists n \in \mathbb{N},\ n > 0 : \quad \forall z \in L,\ |z| \geq n : \\ &\exists u, v, w \in \Sigma^* : \\ &z = uvw,\ |uv| \leq n,\ |v| \geq 1 \\ \text{und } &\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ ein beliebiger DEA für L. Wähle $n = |Q|$ und $z \in L$ beliebig mit $|z| \geq n$.

Beim Lesen von z durchläuft $\mathcal{A}$ genau $\overbrace{|z| + 1}^{\geq n+1}$ Zustände. Somit gibt es mindestens einen Zustand $q \in Q$, der mehrmals besucht wird (Schubfachprinzip).

Wähle den Zustand q, der als Erster zweimal besucht wird.

$$\begin{aligned}
\text{Nun gilt:}\quad & \exists u : \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, u) = q && u \text{ Präfix von } z \\
& \exists v : \quad \tilde{\delta}(q, v) = q && uv \text{ Präfix von } z \\
& \exists w : \quad \tilde{\delta}(q, w) \in F && uvw = z \\
& \qquad\quad |v| \geq 1 \\
& \qquad\quad |uv| \leq n && \text{da } q \text{ als Erster zweimal besucht wird}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Es folgt für beliebiges } i \in \mathbb{N} : \quad \tilde{\delta}(q^{\mathsf{init}}, uv^i w) &= \tilde{\delta}(q, v^i w) \\
&= \tilde{\delta}(q, w) && \text{denn } \forall i : \tilde{\delta}(q, v^i) = q \\
&\in F
\end{aligned}$$

□

Bsp. 2.13: Die Sprache $L_{\text{centered}} = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Wir geben hierfür einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Pumping Lemmas PL.

Sei n die Konstante aus dem PL. Wähle $z = 0^n 1 0^n$. (Gültige Wahl, da $|z| = 2n + 1 \geq n$)
Laut PL existieren u, v, w, sodass $z = uvw$ mit $|v| \geq 1, |uv| \leq n$ und $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$.
Nach Wahl von z gilt nun

- $uv = 0^m$ mit $m \leq n$
- $v = 0^k$ mit $k \geq 1$
- $w = 0^{n-m} 1 0^n$

Betrachte $uv^2w = 0^{m-k}0^{2k}0^{n-m}10^n = 0^{n+k}10^n \notin L$. Widerspruch! Somit ist L nicht regulär.

Zur Illustration:

$$\underbrace{0 \ \ldots\ldots \ 0}_{n} 1 \underbrace{0 \ \ldots\ldots \ 0}_{n}$$

$$\vdash\text{u}\dashv\vdash\text{v}\dashv\text{———w———}\dashv$$

2.4 Nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)

Aufgabe: Konstruiere für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen DEA für die folgende Sprache.

$$L_n = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das } n\text{-letzte Symbol von } w \text{ ist } 1\}$$

Naiver Lösungsversuch:

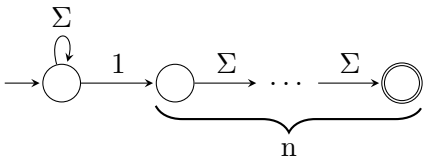


Abb. 3: Nichtdeterministischer Automat für L_n

Problem: Das Zustandsdiagramm beschreibt keinen DEA: Der Startzustand hat zwei ausgehende Kanten für 1.

Untersuche die Sprache mit Hilfe der Nerode-Relation. Beobachtung: Je zwei Wörter der Länge n sind in unterschiedlichen Äquivalenzklassen. Es gibt also mindestens 2^n Äquivalenzklassen; aus Korollar 2.5 wissen wir, dass ein minimaler DEA, der L_n akzeptiert, mindestens 2^n Zustände haben muss.

Idee: Definiere einen neue Art von Automaten, bei dem ein Zustand pro Zeichen mehrere Nachfolger haben darf.

Def. 2.10 (NEA)**:** Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)*, (NFA $\hat{=}$ nondeterministic finite automaton) ist ein 5-Tupel

$$\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F).$$

Dabei ist

- Σ ein Alphabet,
- Q eine *endliche* Menge, deren Elemente wir *Zustände* nennen,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ eine Funktion, die wir *Transitionsfunktion* nennen,
- $q^{\mathsf{init}} \in Q$ ein Zustand, den wir *Startzustand* nennen und
- $F \subseteq Q$ eine Teilmenge der Zustände, deren Elemente wir *akzeptierende* Zustände nennen. ◇

Bemerkung: Die Definition des NEA unterscheidet sich vom DEA also nur in der Transitionsfunktion. Beim DEA ist der Bildbereich der Transitionsfunktion die Menge der Zustände Q. Beim NEA ist der Bildbereich die Potenzmenge $\mathcal{P}(Q)$ der Zustandsmenge Q. Analog zu DEAs werden wir auch NEAs mit Hilfe eines Zustandsdiagramms beschrieben. Zum Beispiel beschreibt Abb. 3 für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen NEA für die Sprache L_n.

Im Folgenden sei $\mathcal{N}$ immer ein NEA.

Def. 2.11: Wir nennen eine Folge von Zuständen $q_0 q_1 \dots q_n$ einen *Lauf von $\mathcal{N}$ über* $w = a_1 \dots a_n$, falls $q_i \in \delta(q_{i-1}, a_i)$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$. Wir nennen einen Lauf *initial*, falls $q_0 = q^{\mathsf{init}}$. Wir nennen einen Lauf *akzeptierend*, falls $q_n \in F$. ◇

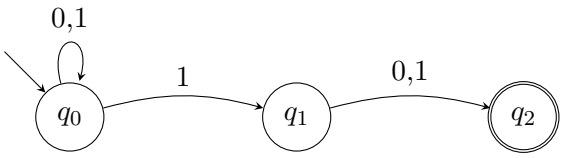
Vorlesung: 8.11.17

Def. 2.12: Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von $\mathcal{N}$ *akzeptiert*, falls $\mathcal{N}$ einen initialen und akzeptierenden Lauf über w hat. Die von $\mathcal{N}$ akzeptierte Sprache ist die Menge der von $\mathcal{N}$ akzeptierten Wörter, d.h. $L(\mathcal{N}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \text{ initialer, akzeptierender Lauf von } \mathcal{N} \text{ über } w\}$. ◇

Bsp. 2.14: Der NEA für die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ das zweitletzte Zeichen von } w \text{ ist } 1 \}$$

hat die folgende graphische Repräsentation.



Bemerkung: Die Frage, ob ein gegebenes Wort w akzeptiert wird (das „Wortproblem“), lässt sich für NEAs nicht mehr so leicht beantworten wie wir es von DEAs gewohnt sind. Ein sinnvolles Vorgehen scheint, jeden initialen Lauf zu betrachten, doch z.B. für das Wort 111 hat obiger NEA bereits drei verschiedene initiale Läufe: $q_0q_0q_0$, $q_0q_0q_1$, $q_0q_0q_2$.

Bemerkung: Die Definitionen von NEA und DEA in der Literatur sind nicht einheitlich. Es gibt äquivalente NEA-Definitionen, die statt der Transitionsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ eine Transitionsrelation $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ verwenden. Es gibt alternative NEA-Definitionen, die eine Menge von Startzuständen erlauben. Alternativ könnte man auch zunächst den NEA einführen und den DEA als Spezialfall dessen definieren (Spezialfall: Das Bild der Transitionsfunktion ist einelementig für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$).

Bemerkung: Zu jedem DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ gibt es einen NEA, der die gleiche Sprache akzeptiert. Beispiel: der NEA $\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta_{\mathsf{NEA}}, q^{\mathsf{init}}, F)$ mit $\delta_{\mathsf{NEA}}(q, a) = \{\delta(q, a)\}$, der sich von $\mathcal{A}$ nur in der Transitionsfunktion unterscheidet.

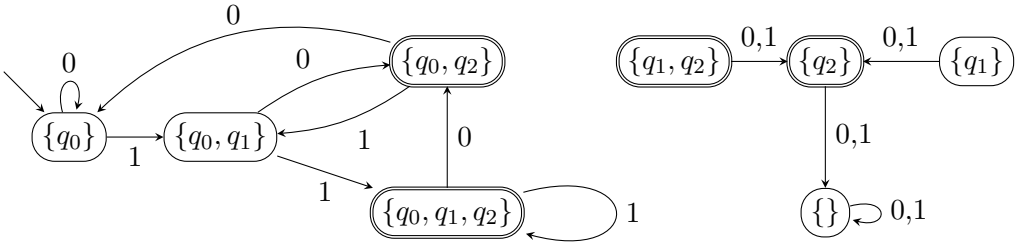
Satz 2.7 (Rabin und Scott)**:** Zu jedem NEA $\mathcal{N}$ mit n Zuständen gibt es einen DEA $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ mit 2^n Zuständen, sodass $L(\mathcal{A}_\mathcal{P}) = L(\mathcal{N})$ gilt.

Zur Vorbereitung des Beweises machen wir zunächst die folgende Definition.

Def. 2.13 (Potenzmengenautomat)**:** Für einen gegebenen NEA $\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ ist der Potenzmengenautomat $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} Q_\mathcal{P} &= \mathcal{P}(Q) \\ \delta_\mathcal{P}(p,a) &= \bigcup_{q\in p} \{\delta(q,a)\} \\ q_\mathcal{P}^{\mathsf{init}} &= \{q^{\mathsf{init}}\} \\ F_\mathcal{P} &= \{p \in Q_\mathcal{P} \mid p \cap F \neq \varnothing\} \end{aligned}$$ ◇

Bsp. 2.15: Der Potenzmengenautomat für den NEA aus Bsp. 2.14 hat das folgende Zustandsdiagramm.



Die vier Zustände auf der rechten Seite sind nicht erreichbar.

Beweis (von Satz 2.7): Zeige $L(\mathcal{A}_\mathcal{P}) = L(\mathcal{N})$. Dafür beweisen wir zunächst via Induktion über die Länge von w die folgende Eigenschaft:

$\forall w \in \Sigma^* \; \forall p \in Q_\mathcal{P} \backslash \{\{\}\} \; \forall q \in Q$:

$$q \in \tilde{\delta}_\mathcal{P}(p,w) \Leftrightarrow \exists \underbrace{q_0, q_1, \ldots, q_n}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w|, q_0 \in p \text{ und } q_n = q$$

I.A. ($n = 0$, also $w = \varepsilon$): Gilt trivialerweise, da $p \neq \{\}$.
I.S. ($n \rightsquigarrow n+1$): Sei $w = aw'$ ein beliebiges Wort der Länge $n+1$.

$$\begin{aligned} q \in \tilde{\delta}_\mathcal{P}(p,w) &\Leftrightarrow q \in \tilde{\delta}_\mathcal{P}(\delta_\mathcal{P}(p,a), w') \\ &\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \exists \underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w'|, q_1 \in \delta_\mathcal{P}(p,a) \text{ und } q_{n+1} = q \\ &\Leftrightarrow \exists \underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w'|, \exists q_0 \in p : q_1 \in \delta(q_0,a) \text{ und } q_{n+1} = q \\ &\Leftrightarrow \exists \underbrace{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n+1 = |w|, q_0 \in p \text{ und } q_{n+1} = q \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaft zeigen wir nun die Gleichheit $L(\mathcal{A}_\mathcal{P}) = L(\mathcal{N})$.

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{A}_\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \tilde{\delta}_\mathcal{P}(q_\mathcal{P}^{\mathsf{init}}, w) \in F_\mathcal{P} \\ &\Leftrightarrow \exists q_f \in \tilde{\delta}_\mathcal{P}(q_\mathcal{P}^{\mathsf{init}}, w) \cap F \\ &\Leftrightarrow \exists \underbrace{q_0, q_1, \ldots, q_n}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w|, q_0 \in q^{\mathsf{init}} \text{ und } q_n \in F \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ initialer, akzeptierender Lauf von } \mathcal{N} \text{ über } w \\ &\Leftrightarrow w \in L(\mathcal{N}) \end{aligned}$$ □

Bemerkung: Es gelten also die folgenden Äquivalenzen.

$$L \text{ regulär} \overset{\text{Def. 2.3}}{\Longleftrightarrow} L = L(\mathcal{A}) \text{ für einen DEA } \mathcal{A} \iff L = L(\mathcal{N}) \text{ für einen NEA } \mathcal{N}$$

Bemerkung: NEAs sind eine exponentiell kompaktere Repräsentation von regulären Sprachen im folgenden Sinne:

1. Es gibt mit L_n (n-letztes Zeichen) eine Menge von Sprachen, die sich durch einen NEA mit $n+1$ Zuständen darstellen lassen, aber bei denen ein minimaler DEA mindestens 2^n Zustände hat. (Siehe Übungsblatt 3, Aufgabe 2).
2. Zu jedem NEA mit n Zuständen gibt es einen DEA mit 2^n Zuständen, der die gleiche Sprache akzeptiert. (Satz 2.7).
3. Zu jedem DEA mit n Zuständen gibt es einen NEA mit n Zuständen, der die gleiche Sprache akzeptiert.

2.4.1 ε-Übergänge

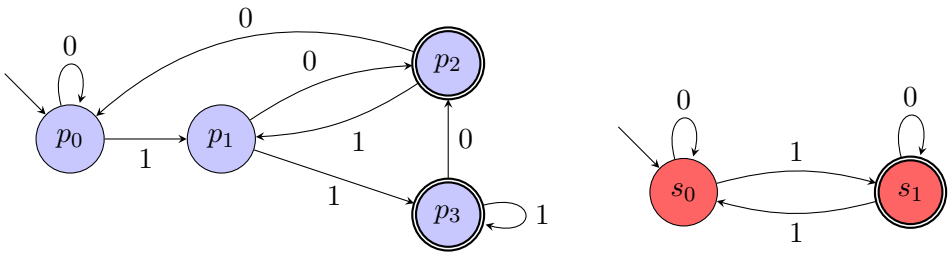
In diesem Unterkapitel führen wir mit dem ε-NEA ein weiteres Automatenmodell ein. Wir wollen ε-NEAs zunächst durch die folgende Fragestellung und anschließende Diskussion motivieren.

Frage: Gegeben zwei reguläre Sprachen L_1, L_2, ist auch die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ eine reguläre Sprache?

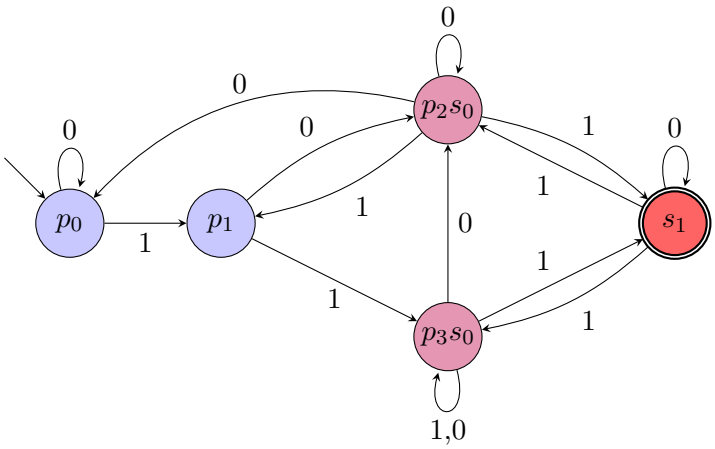
Idee: Gegeben DEA $\mathcal{A}_1$ mit $L(\mathcal{A}_1) = L_1$ und DEA $\mathcal{A}_2$ mit $L(\mathcal{A}_2) = L_2$, konstruiere NEA für $L_1 \cdot L_2$ durch „Hintereinanderschalten“ von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$; immer wenn wir in einem akzeptierenden Zustand von $\mathcal{A}_1$ sind, erlauben wir, in $\mathcal{A}_2$ zu „wechseln“.

Erste, naive (und inkorrekte) Umsetzung dieser Idee: Verschmelze akzeptierende Zustände von $\mathcal{A}_1$ mit dem Startzustand von $\mathcal{A}_2$ Wir betrachten die folgenden Automaten, um zu sehen, dass diese Umsetzung nicht zielführend ist.

Bsp. 2.16: Links: DEA $\mathcal{A}_1$, der Automat aus Bsp. 2.14 eingeschränkt auf die erreichbaren Zustände. Rechts: DEA $\mathcal{A}_2$ mit der Sprache $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{Anzahl 1 in } w \text{ ungerade}\}$.



Unten: NEA $\mathcal{N}_{\mathsf{naiv}}$ aus der naiven und inkorrekten Konstruktion für die Konkatenation.



Dieser NEA akzeptiert nun auch das Wort $w = 11011$. Allerdings ist w nicht in der Konkatenation $L(\mathcal{A}_1) \cdot L(\mathcal{A}_2)$, denn es gibt keine Zerlegung $w = w_1 \cdot w_2$, sodass sowohl das Präfix w_1 von $\mathcal{A}_1$ als auch das Suffix w_2 von $\mathcal{A}_2$ akzeptiert wird.

Das „Verschmelzen“ von p_2 (bzw. p_3) mit s_0 war also keine gute Idee. Was uns aber helfen würde: ein Zustandsübergang, der es uns erlaubt, von Zustand p_2 (bzw. p_3) in den Zustand s_0 zu gehen, ohne dabei ein Zeichen zu lesen.

Wir nennen solch einen Zustandsübergang ε-Übergang und definieren einen Automaten, der solche Zustandsübergänge haben kann, wie folgt.

Def. 2.14 (ε-NEA)**:** Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε-Übergängen* ist ein 5-Tupel

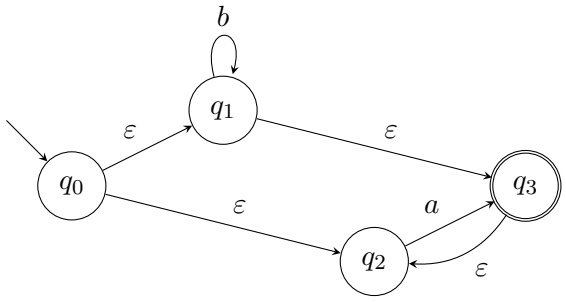
$$\mathcal{B} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$$

wobei Σ, Q, q^{init}, F wie bei NEAs (bzw. DEAs) definiert sind und die Transitionsfunktion den folgenden Typ hat.

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q) \qquad \diamond$$

Vorlesung: 10.11.17

Bsp. 2.17: Zustandsdiagramm eines ε-NEA über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



Im Folgenden sei $\mathcal{B}$ immer ein ε-NEA.

Wie bei den bisher definierten Automaten wollen wir mit Hilfe eines ε-NEA eine Sprache definieren. Wir benötigen dafür zunächst zwei weitere Definitionen.

Der ε-Abschluss ist eine Abbildung, die jedem Zustand q die Menge der Zustände zuordnet, die von q über ε-Übergänge erreichbar sind. Wir definieren diese Abbildung formal wie folgt. Dabei verwenden wir den Abbildungsnamen ecl, um an den englischen Begriff „ε closure“ zu erinnern.

Def. 2.15: Der *ε-Abschluss* $\mathsf{ecl}_{\mathcal{B}} : Q \to \mathcal{P}(Q)$ ist die kleinste Abbildung, die für alle $q, q', q'' \in Q$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$q \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q)$$
$$q' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q) \text{ und } q'' \in \delta(q', \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad q'' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q) \qquad \diamond$$

Offensichtlich kann immer eine endliche explizite Repräsentation von $\mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}$ berechnet werden: Starte in jedem Zustand einmal und folge mit Breitensuche allen ε-Kanten im Zustandsdiagramm.

Bsp.: Für den ε-NEA aus Bsp. 2.17 sieht $\mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}$ wie folgt aus:

q	q_0	q_1	q_2	q_3
$\mathsf{ecl}(q)$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$

Als Nächstes definieren wir eine dreistellige Relation, die uns für je zwei Zustände sagt, welche Wörter den Automaten vom ersten Zustand in den zweiten Zustand überführen. Der Name der Relation „reach“ soll dabei an des englische Wort „reachability“ erinnern.

Def. 2.16: Die *Erreichbarkeitsrelation* $\mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ ist die kleinste Relation, die für alle $q, q', q'', q''' \in Q$ und für alle $w \in \Sigma^*$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$q' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q) \quad \Rightarrow \quad (q, \varepsilon, q') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$$
$$q' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q), q'' \in \delta(q', a) \text{ und } (q'', w, q''') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \quad \Rightarrow \quad (q, aw, q''') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \qquad \diamond$$

Für den ε-NEA aus Bsp. 2.17 können wir $\mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$ mit Hilfe der folgenden Tabelle angeben. Dabei bedeutet der Eintrag von einer Sprache L in Zeile q_i und Spalte q_j, dass für alle $w \in L$ das Tripel (q_i, w, q_j) in $\mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$ enthalten ist.

$\mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	$\{\varepsilon\}$	$\{b\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$
q_1	$\{\}$	$\{b\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$
q_2	$\{\}$	$\{\}$	$\{a\}^*$	$\{a\} \cdot \{a\}^*$
q_3	$\{\}$	$\{\}$	$\{a\}^*$	$\{a\}^*$

Def. 2.17: Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von $\mathcal{B}$ *akzeptiert*, wenn $(q^{\mathsf{init}}, w, q_f) \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$ für ein $q_f \in F$. Die von $\mathcal{B}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{B})$ ist die Menge der von $\mathcal{B}$ akzeptierten Wörter, d.h. $L(\mathcal{B}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : (q^{\mathsf{init}}, w, q) \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}}\}$. $\diamond$

Offensichtlich gibt es zu jedem NEA $\mathcal{N}$ einen ε-NEA $\mathcal{B}$, der die gleiche Sprache akzeptiert. Die Konstruktion ist dabei einfach: Erweitere die Transitionsfunktion um $\delta(q, \varepsilon) = \{\}$ für alle $q \in Q$. Für die Sprachgleichheit zeigen wir via Induktion über die Länge von w, dass für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\exists \text{ Lauf } q_0, q_1, \ldots, q_n \text{ von } \mathcal{N} \text{ über } w \quad \Leftrightarrow \quad (q_0, w, q_n) \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$$

Der folgende Satz zeigt uns, dass auch die umgekehrte Richtung gilt.

Satz 2.8: Zu jedem ε-NEA $\mathcal{B}$ gibt es einen NEA $\mathcal{N}$, sodass $L(\mathcal{N}) = L(\mathcal{B})$ gilt.

Zur Vorbereitung des Beweises machen wir zunächst die folgende Definition.

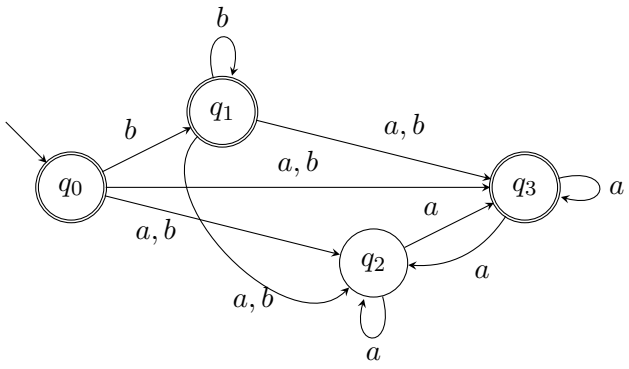
Def. 2.18 (ε-freier Automat)**:** Für einen gegebenen ε-NEA $\mathcal{B} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ definieren wir den NEA $\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta_{\mathcal{N}}, q^{\mathsf{init}}, F_{\mathcal{N}})$ mit

$$\delta_{\mathcal{N}}(q, a) = \bigcup_{q' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q)} \{q''' \mid \exists q'' : q'' \in \delta(q', a) \text{ und } q''' \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q'')\}$$

$$F_{\mathcal{N}} = \{q \in Q \mid \exists q_f \in F : q_f \in \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q)\}$$

und nennen diesen NEA den *ε-freien Automaten* von $\mathcal{B}$. $\diamond$

Bsp. 2.18: Der ε-freie Automat für den ε-NEA aus Bsp. 2.17 hat das folgende Zustandsdiagramm.



Beweis (von Satz 2.8: ε-Eliminierung): Zeige $L(\mathcal{N}) = L(\mathcal{B})$. Dabei verwenden wir die folgende Eigenschaft, die wir via Induktion über die Länge von w in den Übungen zeigen werden.

$\forall w \in \Sigma^+ \; \forall q, q' \in Q$:

$$(q, w, q') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \exists \underbrace{q_0, q_1, \ldots, q_n}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w|, q_0 = q \text{ und } q_n = q'$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaft können wir nun leicht für $w \neq \varepsilon$ zeigen:

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{B}) &\overset{\text{Def. 2.3}}{\Leftrightarrow} \exists q_f \in F : (q^{\mathsf{init}}, w, q_f) \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow \exists q_f \in F_{\mathcal{N}} : \underbrace{q_0, q_1, \ldots, q_n}_{\text{Lauf}} \in Q, \text{ sodass } n = |w|, q_0 = q^{\mathsf{init}} \text{ und } q_n = q_f \\ &\overset{\text{Def. 2.17}}{\Leftrightarrow} w \in L(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

Der Fall $w = \varepsilon$ folgt mit $\varepsilon \in L(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \exists q \in F \cap \mathsf{ecl}_{\mathcal{B}}(q^{\mathsf{init}}) \Leftrightarrow q^{\mathsf{init}} \in F_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{N})$. □

Mit Hilfe der ε-NEAs greifen wir nun die zu Beginn von Abschnitt 2.4.1 aufgeworfene Fragestellung wieder auf und zeigen, dass für je zwei reguläre Sprachen auch die Konkatenation regulär ist.

Wir geben hierfür zunächst eine Konstruktion an.

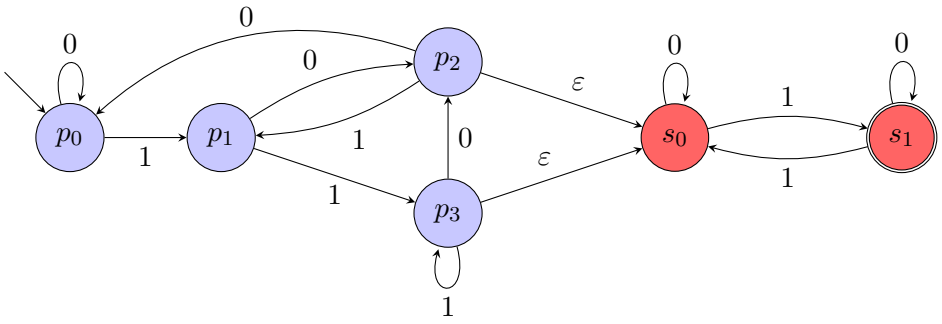
Def. 2.19: Gegeben zwei ε-NEA $\mathcal{B}_i = (\Sigma, Q_i, \delta_i, q_i^{\mathsf{init}}, F_i)$, $i = 1, 2$, definieren wir den

ε-NEA für Konkatenation $\mathcal{B} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ wie folgt.

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_1 \dot\cup Q_2 \\
\delta(q,x) &= \begin{cases} \delta_1(q,x) & q \in Q_1 \wedge (q \notin F_1 \vee x \neq \varepsilon) \\ \delta_1(q,x) \cup \{q_2^{\mathsf{init}}\} & q \in F_1 \wedge x = \varepsilon \\ \delta_2(q,x) & q \in Q_2 \end{cases} \\
q^{\mathsf{init}} &= q_1^{\mathsf{init}} \\
F &= F_2
\end{aligned}
$$

◇

Bsp. 2.19: Der ε-NEA für Konkatenation für die beiden Automaten aus Bsp. 2.16 hat das folgende Zustandsdiagramm.



Lemma 2.9: Die vom ε-NEA für Konkatenation akzeptierte Sprache ist $L(\mathcal{B}_1) \cdot L(\mathcal{B}_2)$.

Beweis: Zeige via Induktion über die Länge von w_1, dass $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*, \forall q_1 \in Q_1$, $\forall q_1' \in F, \forall q_2' \in Q_2$ die folgende Eigenschaft gilt.

$$(q_1, w_1, q_1') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}_1} \text{ und } (q^{\mathsf{init}}, w_2, q_2') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}_2} \quad \Leftrightarrow \quad (q_1, w, q_2') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}}$$

Mit dieser Eigenschaft folgt leicht für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$:

$$w_1 \in L(\mathcal{B}_1) \text{ und } w_2 \in L(\mathcal{B}_2) \quad \Leftrightarrow \quad w_1 \cdot w_2 \in L(\mathcal{B})$$

□

2.5 Abschlusseigenschaften

Vorlesung: 15.11.17

Def. 2.20: Eine Menge X heißt *abgeschlossen* unter Operation $f : X^n \to X$, falls $\forall x_1, \ldots, x_n \in X : f(x_1, \ldots, x_n) \in X$. ◇

Zum Beispiel sind die natürlichen Zahlen abgeschlossen unter Addition, aber nicht abgeschlossen unter Subtraktion.

Im Folgenden schreiben wir *REG* für die Menge aller regulären Sprachen.

Lemma 2.10: Die Menge *REG* der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Komplement.

BEWEIS: Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es (per Definition) einen DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ der L akzeptiert. Wir konstruieren den DEA $\overline{\mathcal{A}} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, Q \backslash F)$ für $\overline{L}$, bei dem ein Zustand genau dann akzeptierend ist, wenn der Zustand in $\mathcal{A}$ nicht akzeptierend ist. Man kann leicht zeigen, dass $L(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{L}$; somit ist auch $\overline{L}$ regulär. □

Lemma 2.11: Die Menge *REG* der regulären Sprache ist abgeschlossen unter dem Stern-Operator.

BEWEIS: Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es einen ε-NEA $\mathcal{B} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$, der L akzeptiert. Wir konstruieren einen NEA $\mathcal{B}_* = (\Sigma, Q \dot\cup \{q_*^{\mathsf{init}}\}, \delta_*, q_*^{\mathsf{init}}, F \dot\cup \{q_*^{\mathsf{init}}\})$ für L^*, indem wir

- einen neuen akzeptierenden Startzustand einführen,
- vom neuen Startzustand einen ε-Übergang zum alten Startzustand hinzufügen und
- von jedem akzeptierenden Zustand einen ε-Übergang zum alten Startzustand hinzufügen.

$$\delta_*(q,x) = \begin{cases} \delta(q,x) & q \notin F \text{ oder } x \neq \varepsilon \\ \delta(q,x) \cup \{q^{\mathsf{init}}\} & q \in F \text{ und } x = \varepsilon \\ \{\} & q = q_*^{\mathsf{init}} \text{ und } x \in \Sigma \\ \{q^{\mathsf{init}}\} & q = q_*^{\mathsf{init}} \text{ und } x = \varepsilon \end{cases}$$

Man kann via Induktion über die Länge von Wörtern zeigen, dass $L(\mathcal{B}_*) = L^*$ gilt. □

Bemerkung: Die Menge der regulären Sprachen *REG* ist unter den folgenden Operationen abgeschlossen.

$\cap$	(Durchschnitt)	Satz 2.1
$\cup$	(Vereinigung)	Präsenzübungen erste Woche, Aufgabe 3
$\overline{}$	(Komplement)	Lemma 2.10
$\cdot$	(Konkatenation)	Lemma 2.9
*	(Kleene-Stern)	Lemma 2.11

2.6 Reguläre Ausdrücke

2.6.1 Motivation

Problemstellung: Sie haben auf Ihrem Rechner irgendwo eine Textdatei mit Notizen zu dieser Vorlesung, können sich aber gerade nicht an den Pfad erinnern. Sie wissen aber

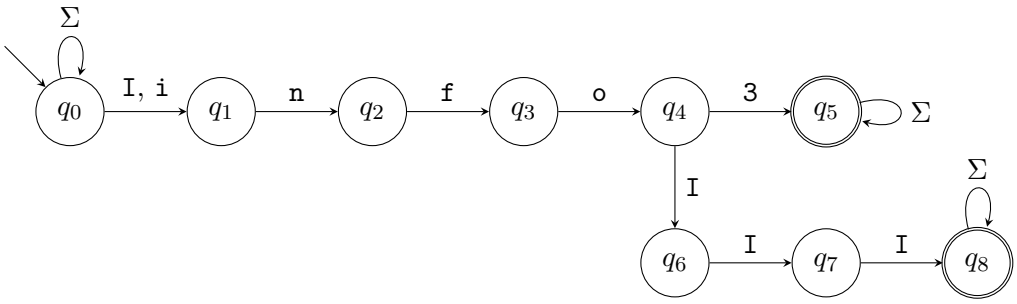
noch, dass die Zeichenkette `info3` oder `infoIII` enthalten ist. Möglicherweise war das `i` am Anfang aber auch groß geschrieben. Da Sie mehrere Dateien mit dieser Zeichenkette haben, soll der Rechner jeweils Dateinamen und die entsprechenden Zeilen ausgeben.

Auf Systemen, auf denen die GNU Tools installiert sind, kann dieses Problem mit dem folgenden Befehl gelöst werden.

```
grep -r "\(I\|i\)nfo\(III\|3\)" /
```

Konzeptuell soll Ihr Rechner hier Instanzen des Wortproblems lösen. Ihre Sprache besteht aus allen Zeichenketten, die `info3` in den oben beschriebenen Varianten enthalten. Die Wörter, die getestet werden sollen, sind die Zeilen aller Dateien auf dem Rechner.

Eine Umsetzung: Gib dem Rechner den folgenden NEA, welchen er dann in einen DEA konvertiert, um das Wortproblem effizient zu lösen.



Problem: Dem Rechner einen Graphen als Eingabe zu übermitteln ist unkomfortabel oder zeitaufwändig. Wir führen deshalb einen weiteren textbasierten Formalismus für reguläre Sprachen ein. Dieser hat große Ähnlichkeiten zum dem in der Praxis verwendeten Input von `grep`.

Def. 2.21: Die Menge $RE(\Sigma)$ der *regulären Ausdrücke über* Σ ist induktiv definiert durch:

- $\underline{\emptyset} \in RE(\Sigma)$
- $\underline{\varepsilon} \in RE(\Sigma)$
- $a \in RE(\Sigma)$ für alle $a \in \Sigma$
- falls $r, s \in RE(\Sigma)$
  - $(r + s) \in RE(\Sigma)$
  - $(r \cdot s) \in RE(\Sigma)$
  - $r^* \in RE(\Sigma)$

$\diamond$

Konventionen: Wir möchten nicht immer alle Klammern schreiben müssen. Wir führen deshalb die folgenden Präzedenzregeln ein: „*“ bindet stärker als „$\cdot$“ und „$\cdot$“ bindet stärker als „$+$“. Nach Definition der Semantik werden wir außerdem sehen, dass „$\cdot$“ und „$+$“ assoziativ sind. Unsere Konvention ist: Sofern mit Hilfe dieser Regeln der reguläre Ausdruck zweifelsfrei rekonstruiert werden kann, dürfen wir Klammern und „$\cdot$“ weglassen. Wir schreiben z.B. $110 + 0$ statt $((1 \cdot (1 \cdot 0)) + 0)$.

Bsp. 2.20:

1. `(A+...+Z+a+...+z+0+...+9)*(I+i)nfo(3+III)(A+...+Z+a+...+z+0+...+9)*` ist ein regulärer Ausdruck[12] über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{A}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{a}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{0}, \ldots, \mathtt{9}\}$.
2. $(\underline{\emptyset\varepsilon})^* + a$ ist ein regulärer Ausdruck über $\Sigma = \{a\}$.
3. $\underline{\emptyset\varepsilon\emptyset\varepsilon}$ ist ein regulärer Ausdruck über jedem Alphabet.
4. *aaaabbbbbbb* ist ein regulärer Ausdruck über $\Sigma = \{a, b\}$.
5. a^4b^7 ist **kein** regulärer Ausdruck
6. $(0 + 1 \cdot (01^*0)^* \cdot 1)^*$ ist ein regulärer Ausdruck über $\Sigma = \{0, 1\}$.

Wir geben regulären Ausdrücken mit Hilfe der folgenden Definition eine Semantik.

Def. 2.22: Die durch einen regulären Ausdruck *beschriebene Sprache* $[\![\cdot]\!] : RE(\Sigma) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned}
[\![\underline{\emptyset}]\!] &= \varnothing \\
[\![\underline{\varepsilon}]\!] &= \{\varepsilon\} \\
[\![a]\!] &= \{a\} \quad a \in \Sigma \\
[\![(r + s)]\!] &= [\![r]\!] \cup [\![s]\!] \\
[\![(r \cdot s)]\!] &= [\![r]\!] \cdot [\![s]\!] \\
[\![r^*]\!] &= [\![r]\!]^*
\end{aligned}$$ ◇

Bsp. 2.21:

$$[\![a + (\underline{\emptyset\varepsilon})^*]\!] \quad = \quad [\![a]\!] \cup ([\![\underline{\emptyset}]\!] \cdot [\![\underline{\varepsilon}]\!])^* \quad = \quad \{a\} \cup (\emptyset)^* \quad = \quad \{a\} \cup \{\varepsilon\} \quad = \quad \{a, \varepsilon\}$$

Bsp. 2.22: Die aus Bsp. 2.14 bekannte Sprache

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das zweitletzte Zeichen von } w \text{ ist } 1\}$$

wird durch den regulären Ausdruck $(0 + 1)^*1(0 + 1)$ beschrieben.

[12] Wir verwenden hier `A+...+Z` als Abkürzung für die Disjunktion aus 26 Zeichen. Der eigentliche reguläre Ausdruck besteht aus der Disjunktion; die drei Punkte kommen darin nicht vor.

Satz 2.12 (Kleene)**:** L ist regulär $\Leftrightarrow$ L ist Sprache eines regulären Ausdrucks.

Beweis (Kleene, $\Leftarrow$): Betrachte zu einem regulärem Ausdruck $r \in RE(\Sigma)$ die durch diesen erzeugte Sprache $L = [\![r]\!]$. Zeige via strukturelle Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke, dass $[\![r]\!]$ regulär ist.

I.A.:
- $r = \underline{\emptyset}$, $[\![r]\!] = \emptyset$ ist regulär
- $r = \underline{\varepsilon}$, $[\![r]\!] = \{\varepsilon\}$ ist regulär
- $r = a$, $[\![r]\!] = \{a\}$ ist regulär (NEA: )

I.V.: Für $i \in \{1, 2\}$ gilt: $[\![r_i]\!]$ ist regulär.

I.S.:
- $r = r_1 + r_2$, $[\![r]\!] = [\![r_1]\!] \cup [\![r_2]\!]$ ist regulär nach I.V. und Abschluss unter Vereinigung (gezeigt in Präsenzübungen, Aufgabe 3)
- $r = r_1 \cdot r_2$, $[\![r]\!] = [\![r_1]\!] \cdot [\![r_2]\!]$ ist regulär nach I.V. und Lemma 2.9
- $r = r_1^*$, $[\![r]\!] = [\![r_1]\!]^*$ ist regulär nach I.V. und Lemma 2.11 □

Im verbleibenden Teil des Abschnitts zu regulären Ausdrücken werden wir zeigen, dass wir für jeden DEA einen regulären Ausdruck mit der gleichen Sprache konstruieren können. (Richtung „⇒“ von Satz 2.12). Um unsere Idee zu beschreiben, benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Def. 2.23: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ ein DEA. Für einen Zustand $q \in Q$ ist die *Sprache des Zustands* $L_q = \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q, w) \in F\}$ die Sprache der Wörter, die von Zustand q aus in einen akzeptierenden Zustand führen. ◇

Im Folgenden betrachten wir einen beliebigen DEA und nummerieren dessen Zustände $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Wir leiten nun ein Gleichungssystem zwischen den Sprachen L_{q_i} her.

$$L_{q_i} = \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q_i, w) \in F\}$$

Zunächst teilen wir L_{q_i} in den Teil, der (potentiell) das leere Wort enthält, und den Teil, der die nicht-leeren Wörter enthält.

$$= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\}\{w' \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(\delta(q_i, a), w') \in F\}$$

Die nicht-leeren Wörter hängen von den Sprachen der Folgezustände ab

$$= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q_i, a)}$$

Anstatt die Vereinigung über die Transitionen a und Folgezustandssprachen L_{q_j} zu bilden, lassen sich die nicht-leeren Wörter von L_{q_i} auch als Vereinigung über alle Zustände mit entsprechend gewählten *Koeffizienten* A_{ij} formulieren; die Zustände, die keine Folgezustände sind, haben den Koeffizienten $\emptyset$.

$$= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{j=0}^{n} \underbrace{\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}}_{A_{ij} \not\ni \varepsilon} L_{q_j}$$

Diese Gleichungen lassen sich analog als Gleichungen von regulären Ausdrücken r_i formulieren:

$$r_i = N(q_i) + \sum_{j=0}^{n} R_{ij} r_j \qquad \text{(RegExGlSys)}$$

wobei $[\![r_i]\!] = L_{q_i}$ und $R_{ij} = \sum\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$ mit $\varepsilon \notin [\![R_{ij}]\!]$ und

$$N(q_i) = \begin{cases} \underline{\varepsilon} & q_i \in F \\ \underline{\emptyset} & q_i \notin F \end{cases}$$

Bsp. 2.23: Wir wollen diese Gleichungen zunächst an einem Beispiel betrachten und verwenden dafür den aus Bsp. 2.12 bekannten DEA, der die Sprache der Binärcodierung von durch drei teilbaren Zahlen akzeptiert: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{bin}(w) \equiv_3 0\}$.

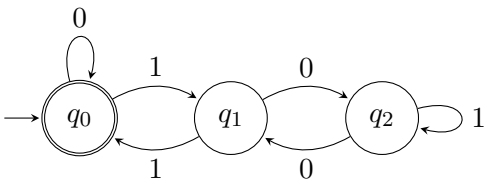


Abb. 4: DEA „modulo 3“

Wir erhalten das folgende Gleichungssystem mit drei Unbekannten.

$$\begin{aligned} r_0 &= \underline{\varepsilon} + 0 \cdot r_0 + 1 \cdot r_1 \\ r_1 &= 1 \cdot r_0 + 0 \cdot r_2 \\ r_2 &= 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 \end{aligned}$$

Wir kennen bisher kein systematisches Verfahren zum Lösen solcher Gleichungen und betrachten deshalb das folgende Lemma.

Vorlesung: 17.11.2017

Lemma 2.13 (Ardens Lemma)**:**
Für die Gleichung $X = A \cdot X \cup B$ über den Sprachen $A, B, X \subseteq \Sigma^*$ gilt:

1. Die Sprache A^*B ist eine Lösung für X.
2. Falls $\varepsilon \notin A$, so ist diese Lösung eindeutig.

Beweis:

1. Wir können leicht nachrechnen, dass A^*B tatsächlich eine Lösung ist.

$$\underbrace{A^*B}_{X} = (AA^* \cup \{\varepsilon\})B = A \cdot (\underbrace{A^*B}_{X}) \cup B$$

2. Sei $\varepsilon \notin A$. Aus dem Beweis für 1. wissen wir außerdem, dass jede Lösung eine Obermenge von A^*B sein muss. Wir führen einen Widerspruchsbeweis, dass keine Lösung ein Wort $x \in \Sigma^*$ mit $x \notin A^*B$ enthalten kann.

   Angenommen, es gäbe Wörter x mit dieser Eigenschaft. Dann gibt es auch Wörter minimaler Länge mit dieser Eigenschaft. Sei w solch ein Wort minimaler Länge. Da alle Lösungen von der Form $\underbrace{A^nX}_{\ni w} \cup \underbrace{A^{n-1}B \cup \cdots \cup AB \cup B}_{\not\ni w}$ sind, hat w die Form $w = u_1 \dots u_n w'$ mit $u_1, \dots, u_n \in A$ und $w' \in X$. Fallunterscheidung:

   - $w' \in A^*B \;\Rightarrow w \in A^nA^*B \subseteq A^*B$ – Widerspruch!
   - $w' \notin A^*B \;\Rightarrow w'$ ist bereits Element einer Lösung. Widerspruch zur minimalen Länge von w.

   Die Sprache A^*B ist also die einzige Lösung für X. □

Wir können Ardens Lemma wie folgt auch für reguläre Ausdrücke formulieren:

Korollar 2.14: Seien r_X, r_A, r_B reguläre Ausdrücke mit $\varepsilon \notin [\![r_A]\!]$, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$[\![r_X]\!] = [\![r_A \cdot r_X + r_B]\!]$$

Dann ist der reguläre Ausdruck

$$r_A^* r_B$$

eine Lösung für r_X, welche die Gleichung erfüllt. Außerdem erzeugen alle anderen Lösungen die gleiche Sprache wie $r_A^* r_B$. ◇

Wir haben nun alle Hilfsmittel, um den Beweis für die fehlende Richtung zu führen.

Beweis (Kleene, $\Rightarrow$): Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ der oben diskutierte DEA mit $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ und $q^{\mathsf{init}} = q_0$, für dessen Sprache wir einen regulären Ausdruck konstruieren möchten.

Mit Hilfe von Ardens Lemma (und weiteren Rechenregeln für Sprachen) können wir nun das Gleichungssystem (RegExGlSys) iterativ lösen. Wir beginnen mit Gleichung r_n:

$$\begin{aligned} r_n &= N(q_n) + \sum_{j=0}^{n} R_{nj} r_j \\ &= \underbrace{N(q_n) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} R_{nj} r_j \right)}_{r_B} + \underbrace{R_{nn}}_{r_A} r_n \end{aligned}$$

Wie oben angedeutet ist nach dem Herausziehen des n-ten Summenglieds Ardens Lemma anwendbar (beachte: $\varepsilon \notin [\![R_{nn}]\!]$); wir erhalten:

$$r_n := R_{nn}^* \left(N(q_n) + \sum_{j=0}^{n-1} R_{nj} r_j \right)$$

Dieses Ergebnis in $r_0, \ldots, r_{n-1}$ eingesetzt ergibt:

$$r_i = N(q_i) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} R_{ij} r_j \right) + R_{in} \underbrace{R_{nn}^* \left(N(q_n) + \sum_{j=0}^{n-1} R_{nj} r_j \right)}_{r_n}$$

(Ausmultiplizieren von $R_{in} R_{nn}^*$)

$$= N(q_i) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} R_{ij} r_j \right) + R_{in} R_{nn}^* N(q_n) + \sum_{j=0}^{n-1} R_{in} R_{nn}^* R_{nj} r_j$$

(Zusammenlegen der Summen und Ausklammern von r_j)

$$= N(q_i) + R_{in} R_{nn}^* N(q_n) + \sum_{j=0}^{n-1} (R_{ij} + R_{in} R_{nn}^* R_{nj}) r_j$$

Nach diesen Umformungen ergeben sich ε-freie Koeffizienten $R_{nj} + R_{in} R_{nn}^* R_{nj}$ für r_j und wir können mit dem Auflösen der Summe von $n-1$ analog zu n fortfahren. Am Ende erhalten wir einen regulären Ausdruck als Lösung für r_0. Per Konstruktion gilt $[\![r_0]\!] = L_{q_0} = L_{q^{\mathsf{init}}} = L(\mathcal{A})$. □

Bsp. 2.24: Wir betrachten noch einmal Bsp. 2.23 und lösen das Gleichungssystem auf die im Beweis beschriebene Weise.

$$\begin{aligned} r_0 &= \underline{\varepsilon} + 0 \cdot r_0 + 1 \cdot r_1 \\ r_1 &= 1 \cdot r_0 + 0 \cdot r_2 \\ r_2 &= \underbrace{0 \cdot r_1}_{B} + \underbrace{1}_{A} \cdot r_2 \end{aligned}$$

Ardens Lemma auf r_2 anwenden:

$$r_2 = 1^* \cdot 0 \cdot r_1$$

Einsetzen in r_1:

$$r_1 = \underbrace{1 \cdot r_0}_{B} + \underbrace{0 \cdot 1^* \cdot 0}_{A} \cdot r_1$$

Ardens Lemma auf r_1 anwenden:

$$r_1 = (01^*0)^* \cdot 1 \cdot r_0$$

Einsetzen in r_0:

$$\begin{aligned} r_0 &= \underline{\varepsilon} + 0 \cdot r_0 + 1 \cdot (01^*0)^* \cdot 1 \cdot r_0 \\ &= \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{B} + \underbrace{(0 + 1 \cdot (01^*0)^* \cdot 1)}_{A} \cdot r_0 \end{aligned}$$

Ardens Lemma auf r_0 anwenden:

$$\begin{aligned} r_0 &= (0 + 1 \cdot (01^*0)^* \cdot 1)^* \cdot \underline{\varepsilon} \\ &= (0 + 1(01^*0)^*1)^* \end{aligned}$$

3 Grammatiken und kontextfreie Sprachen

Def. 3.1: Eine *Grammatik* ist ein 4-Tupel (Σ, N, P, S) mit folgenden Komponenten:

- Σ ist ein Alphabet, dessen Elemente wir in diesem Kontext auch *Terminalsymbole* nennen.
- N ist eine endliche Menge, deren Elemente wir *Nichtterminalsymbole* oder *Variablen* nennen.
- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ ist eine endliche Relation, deren Elemente wir *Regeln* oder *Produktionen* nennen.
- $S \in N$ ist ein Nichtterminalsymbol, das wir *Startsymbol* nennen. ◇

Bsp. 3.1: $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit[13]

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\} \\ N &= \{S\} \\ P &= \{S \to 1S0S \\ &\qquad S \to 0S1S \\ &\qquad S \to \varepsilon\} \end{aligned}$$

Def. 3.2 (Ableitungsrelation, Ableitung, Sprache einer Grammatik)**:** Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine Grammatik. Die *Ableitungsrelation*[14] zu $\mathcal{G}$ ist

$$\cdot \vdash_{\mathcal{G}} \cdot \subseteq (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

mit $\alpha \vdash_{\mathcal{G}} \beta$ gdw $\alpha = \gamma_1 \alpha' \gamma_2$, $\beta = \gamma_1 \beta' \gamma_2$ und $\alpha' \to \beta' \in P$

Eine Folge $\alpha = \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \beta$ heißt *Ableitung von β aus α in n Schritten*, geschrieben $\alpha \overset{n}{\vdash}_{\mathcal{G}} \beta$, gdw $\alpha_i \vdash_{\mathcal{G}} \alpha_{i+1}$ für $0 \leq i < n$. Jedes solche α_i heißt *Satzform von $\mathcal{G}$*.

Die *Ableitung von β aus α*, geschrieben $\alpha \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} \beta$, existiert gdw ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\alpha \overset{n}{\vdash}_{\mathcal{G}} \beta$. Damit ist „$\overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}}$“ die reflexive, transitive Hülle von „$\vdash_{\mathcal{G}}$“.

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von $\mathcal{G}$ *erzeugt*, wenn $S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w$ gilt. Die von $\mathcal{G}$ *erzeugte Sprache* ist definiert als:

$$L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w\}$$

Wir nennen zwei Grammatiken *äquivalent*, wenn sie die gleiche Sprache erzeugen. ◇

[13] P ist eine „normale“ binäre Relation, doch wir verwenden statt „$(x, y) \in P$“ meist „$x \to y$“, also einen Pfeil und Infix-Notation, um die Lesbarkeit zu erhöhen.

[14] Analog zur Relation P verwenden wir auch für die Ableitungsrelation wieder Infix-Notation, also $\alpha \vdash \beta$ statt $(\alpha, \beta) \in \vdash$.

Bsp. 3.2: Wir betrachten nochmal die Grammatik aus Bsp. 3.1. Es gilt: $1001 \in L(\mathcal{G})$.

$$S \vdash_{\mathcal{G}} 1S0S \vdash_{\mathcal{G}} 10S \vdash_{\mathcal{G}} 100S1S \vdash_{\mathcal{G}} 100S1 \vdash_{\mathcal{G}} 1001$$

Außerdem gilt: $L(\mathcal{G})$ ist die Sprache der Wörter über $\{0,1\}$, die gleich viele Nullen wie Einsen haben:

Vorlesung: 22.11.17

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$$

Die Funktion $\#_a(w)$ berechnet hierbei die Anzahl der Vorkommen von $a \in \{0,1\}$ in w.

Dass $L(\mathcal{G}) \subseteq L$, lässt sich via Induktion über die Länge der Ableitung von $S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w$ zeigen. Der Beweis wird als Übung dem Leser überlassen.

Wir zeigen $L \subseteq L(\mathcal{G})$. Dazu zeigen wir „Wenn $w \in L$, dann $w \in L(\mathcal{G})$“ via Induktion über die Länge von w. Hierzu definieren wir noch die Hilfsfunktion $d : \Sigma^* \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon) &= 0 \\ d(1w) &= d(w) + 1 \\ d(0w) &= d(w) - 1 \end{aligned}$$

Per Induktion über $|w|$ mit $w \in \Sigma^*$ lässt sich leicht zeigen, dass $L = \{w \in \Sigma^* \mid d(w) = 0\}$ und $d(v \cdot w) = d(v) + d(w)$.

Wir zeigen nun via Induktion über n die folgende Eigenschaft:

$$\forall n' < n : \forall w \in \Sigma^* : \text{ falls } |w| = n' \text{ und } w \in L, \text{ dann } w \in L(\mathcal{G})$$

I.A.: $n = 0$: $w = \varepsilon$. Es gilt $\varepsilon \in L$, da $\#_0(\varepsilon) = \#_1(\varepsilon) = 0$.

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$: $|w| = n > 1$, $w = aw'$, $a \in \{0,1\}$. Beachte: $|w|$ ist gerade für alle $w \in L$.

Betrachte $a = 0$ (der Fall für $a = 1$ funktioniert analog).

Da $0 = d(w) = d(0w') = d(w') - 1$, ist $d(w') = 1$.

Wir zeigen zunächst, dass wir w' in $w_1 1 w_2$ mit $d(w_1) = 0$ und $d(w_2) = 0$ zerlegen können:

Sei $w' = a_1 \dots a_n$. Betrachte die Folge $d_0, \dots, d_n$ mit $d_0 = 0$ und $d_i = d(a_1 \dots a_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Wähle $0 \leq i < n$ maximal, sodass für alle $0 \leq j \leq i$ gilt: $d_j < 1$.[15]

Da i maximal ist, folgt $d_{i+1} \geq 1$. Da $d_{j+1} - d_j \leq 1$ für alle $0 \leq j \leq i$, folgt $d_{i+1} - d_i \leq 1$ und damit auch $d_i = 0$, $d_{i+1} = 1$ und $a_{i+1} = 1$. Setze $w_1 = a_1 \dots a_i$.

Es gilt also $w' = a_1 \dots a_i a_{i+1} w_2 = w_1 w_2$ mit $d(w_1) = 0$.

Da $d(v \cdot w) = d(v) + d(w)$ und $d(w') = d(w_1 1 w_2) = 1$, folgt $d(w_2) = 0$.

[15] Wir wissen, dass $i < n$, da $d_n = d(w') = 1$.

Da $|w_1| < n$ und $|w_2| < n$, folgt nach I.V., dass $S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w_1$ und $S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w_2$.

Es folgt mit den Produktionsregeln $S \vdash_{\mathcal{G}} 0S1S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} 0w_1 1S \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} 0w_1 1w_2$.

Bsp. 3.3: $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$\Sigma = \{a, b, c\}$
$N = \{S, B, C\}$
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Es gilt z.B. $aaabbbccc \in L(\mathcal{G})$.

Außerdem gilt $L(\mathcal{G}) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. (Ohne Beweis)

Die Chomsky-Hierarchie teilt die Grammatiken in vier Typen unterschiedlicher Mächtigkeit ein.

Def. 3.3 (Chomsky-Hierarchie)**:**

- Jede Grammatik ist eine *Typ-0-Grammatik*.
- Eine Grammatik ist *Typ-1* oder *kontextsensitiv*, falls alle Regeln expansiv sind, d.h., für alle Regeln $\alpha \to \beta \in P$ ist $|\alpha| \leq |\beta|$. Ausnahme: falls S nicht in einer rechten Regelseite auftritt, dann ist $S \to \varepsilon$ erlaubt.
- Eine Grammatik heißt *Typ-2* oder *kontextfrei*, falls alle Regeln die Form $A \to \alpha$ mit $A \in N$ und $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ haben.
- Eine Grammatik heißt *Typ-3* oder *regulär*, falls alle Regeln die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} & A \to w \quad && w \in \Sigma^* \\ \text{oder} \quad & A \to aB \quad && a \in \Sigma,\ B \in N \end{aligned}$$

Eine Sprache heißt Typ-i-Sprache, falls es eine Typ-i-Grammatik für sie gibt. ◇

Beobachtung 3.1: Jede Typ-$(i+1)$-Sprache ist auch eine Typ-i-Sprache.

- Jede Typ-3-Grammatik ist eine Typ-2-Grammatik.
- Wir werden im folgenden Unterkapitel zeigen, dass jede Typ-2-Grammatik in eine äquivalente ε-freie[16] Typ-2-Grammatik transformiert werden kann. Diese erfüllt dann auch alle Bedingungen einer Typ-1-Grammatik.
- Jede Typ-1-Grammatik ist auch eine Typ-0-Grammatik.

Im Lauf der Vorlesung werden wir die folgende Aussage zeigen:
Sei $\mathcal{M}_i$ die Menge der Typ-i Sprachen; dann gilt: $\mathcal{M}_3 \subsetneq \mathcal{M}_2 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_0$.

[16] Auf keiner rechten Seite steht ε; Ausnahme: Startsymbol S; vgl. Elimination von ε-Produktionen.

3.1 Kontextfreie Sprachen

Die Sprache aus Bsp. 3.1 ist kontextfrei. Weitere Beispiele sind:

Bsp. 3.4: Arithmetische Ausdrücke ohne Klammern: $\mathcal{G} = (\{E\}, \{a, +, *\}, P, E)$ mit

$$P = \{E \to a \mid E + E \mid E * E\}.$$[17]

Bsp. 3.5: Arithmetische Ausdrücke mit Klammern: $\mathcal{G} = (\{E\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E)$ mit

$$P = \{E \to a \mid (E + E) \mid (E * E)\}.$$

Bsp. 3.6: Syntax von Programmiersprachen. Wir zeigen hier nur exemplarisch Produktionen für einige typische Bestandteile einer Programmiersprache.[18] Wörter in spitzen Klammern sind hier Nichtterminalsymbole. Terminalsymbole sind grau unterlegt.

<Stmt> → <Var> `=` <Exp>
| <Stmt> `;` <Stmt>
| `if` `(` <Exp> `)` <Stmt> `else` <Stmt>
| `while` `(` <Exp> `)` <Stmt>

Für den arithmetischen Ausdruck ohne Klammern $a + a$ gibt es in der Grammatik aus Bsp. 3.4 zwei verschiedene Ableitungen:

- $E \vdash_{\mathcal{G}} E + E \vdash_{\mathcal{G}} a + E \vdash_{\mathcal{G}} a + a$
- $E \vdash_{\mathcal{G}} E + E \vdash_{\mathcal{G}} E + a \vdash_{\mathcal{G}} a + a$

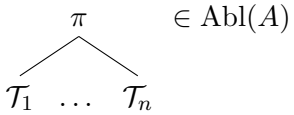
Beide Ableitungen unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge, in der Variablen ersetzt werden. Die folgende Definition erlaubt es uns, beide Ableitungen durch das gleiche Objekt, den sogenannten Ableitungsbaum, darzustellen.

Def. 3.4: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Wir definieren die Menge der *in A beginnenden Ableitungsbäume von $\mathcal{G}$*, $\mathrm{Abl}(A)$, für $A \in N$ als Menge von beschrifteten, geordneten Bäumen induktiv durch:

> Falls $\pi = A \to w_0 A_1 w_1 \dots A_n w_n \in P$ mit $A_i \in N$, $w_0, w_i \in \Sigma^*$, $1 \leq i \leq n$ und $\mathcal{T}_i \in \mathrm{Abl}(A_i)$, dann ist

[17] Notation: Wenn wir mehrere Regeln mit gleicher linker Seite wie z.B. „$A \to \alpha$“ und „$A \to \beta$“ haben, dann dürfen wir diese auch mit Hilfe eines senkrechten Striches als „$A \to \alpha \mid \beta$“ schreiben.

[18] Sie finden am Ende der Java Language Specification `https://docs.oracle.com/javase/specs/` auf ca. 25 Seiten die kontextfreie Grammatik für diese Programmiersprache.



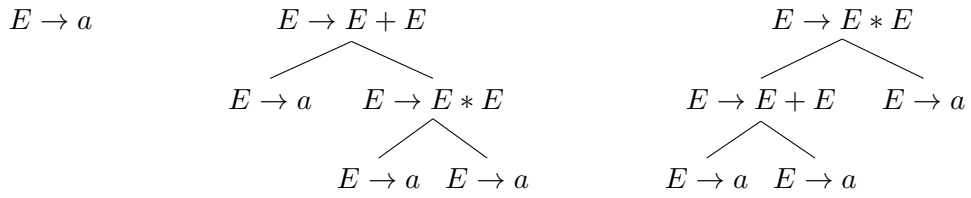
Da es manchmal aufwendig ist, Bäume zu zeichnen, verwenden wir alternativ die folgende Notation: $\pi(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n)$

Das *abgeleitete Wort zu einem* $\mathcal{T} \in \mathrm{Abl}(A)$, $Y(\mathcal{T})$[19], ist definiert durch

$$Y\left(\begin{array}{c}\pi\\ \mathcal{T}_1 \quad \ldots \quad \mathcal{T}_n\end{array}\right) = w_0 Y(\mathcal{T}_1) w_1 \ldots Y(\mathcal{T}_n) w_n$$

wobei $\pi = A \to w_0 A_1 w_1 \ldots A_n w_n \in P$. ◇

Bsp. 3.7: Für die Grammatik aus Bsp. 3.4 sind die folgenden drei Beispiele in E beginnende Ableitungsbäume.



Lemma 3.1: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

$$w \in L(\mathcal{G}) \quad \text{gdw} \quad \exists\, \mathcal{T} \in \mathrm{Abl}(S) \text{ mit } Y(\mathcal{T}) = w$$

(Ohne Beweis.)

Def. 3.5:

- Eine Grammatik $\mathcal{G}$ heißt *eindeutig*, falls es für jedes Wort $\in L(\mathcal{G})$ genau einen Ableitungsbaum gibt.
- Eine kontextfreie Sprache L heißt *eindeutig*, falls es eine eindeutige kontextfreie Grammatik gibt, die L erzeugt. ◇

Die Grammatik aus Bsp. 3.4 ist also nicht eindeutig, denn sowohl für den zweiten als auch für den dritten Ableitungsbaum aus Bsp. 3.7 ist das abgeleitete Wort $a + a * a$.

Im Folgenden verwenden wir auch die Abkürzung CFG für „kontextfreie Grammatik“ (engl. context-free grammar).

[19] Wir verwenden $Y(\mathcal{T})$, um an das englische Wort „yield“ zu erinnern.

3.2 Die Chomsky-Normalform für kontextfreie Sprachen

Vorlesung: 24.11.2017

Wir lernen in diesem Unterkapitel eine spezielle Form von kontextfreien Grammatiken (Chomsky-Normalform) kennen, für die gilt:

- Das Wortproblem ($w \in L(\mathcal{G})$?) lässt sich mit Hilfe eines einfachen Algorithmus entscheiden.
- Jede kontextfreie Grammatik lässt sich „effizient“ in diese Normalform transformieren.

Wir stellen im Folgenden vier Transformationen (SEP, BIN, DEL, UNIT) vor und wollen dabei jeweils den Zeitaufwand und die Größe der resultierenden CFG analysieren.

Dafür definieren wir die Größe einer Grammatik wie folgt.

$$|\mathcal{G}| = \sum_{A \in N} \sum_{A \to \alpha \in P} |A\alpha|$$

Die Größe ist also genau die Anzahl an Zeichen aus $\Sigma \cup N$, die man benötigt, um die Regeln der Grammatik aufzuschreiben.

Def. 3.6: Eine CFG heißt *separiert*, wenn jede Regel eine der folgenden beiden Formen hat.

$$\begin{aligned} A &\to A_1 \dots A_n && \text{für } A \in N, A_i \in N, n \geq 0 \\ A &\to a && \text{für } A \in N, a \in \Sigma \end{aligned}$$ ◇

Lemma 3.2 (SEP)**:** Zu jeder CFG gibt es eine äquivalente separierte CFG.

BEWEIS: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine CFG. Konstruiere $\mathcal{G}' = (\Sigma, N', P', S)$ mit

- $N' = N \dot\cup \{Y_a \mid a \in \Sigma\}$[20]
- $P' = \{Y_a \to a \mid a \in \Sigma\} \cup \{A \to \beta[a \to Y_a] \mid A \to \beta \in P\}$.

  Die Schreibweise $\beta[a \to Y_a]$ bedeutet hier, dass alle $a \in \Sigma$, die in β vorkommen, durch Y_a ersetzt werden.

Offenbar gilt $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ und $\mathcal{G}'$ ist separiert (ohne Beweis). □

Bemerkung: SEP berechnet in $O(|\mathcal{G}|^2)$ eine Grammatik der Größe $O(|\mathcal{G}|)$.

- Laufe für jedes Terminalsymbol einmal über alle Regeln.
- Für jedes neue Nichtterminalsymbol fügen wir eine Regel der Größe 2 hinzu.

[20] „$\dot\cup$“ steht für „disjunkte Vereinigung“

Lemma 3.3 (BIN)**:** Zu jeder CFG gibt es eine äquivalente CFG, bei der für alle Regeln $A \to \alpha$ gilt, dass $|\alpha| \leq 2$.

BEWEIS: Ersetze jede Regel der Form

$$A \to X_1 X_2 \dots X_n, \quad n \geq 3$$

mit $X_i \in N \cup \Sigma$, $1 \leq i \leq n$, durch die Regeln

$$\begin{aligned} A &\to X_1 \langle X_2 \dots X_n \rangle \\ \langle X_2 \dots X_n \rangle &\to X_2 \langle X_3 \dots X_n \rangle \\ &\vdots \\ \langle X_{n-1} X_n \rangle &\to X_{n-1} X_n \end{aligned}$$

Dabei sind $\langle X_2 \dots X_n \rangle$, $\dots$, $\langle X_{n-1} \dots X_n \rangle$ neue Nichtterminalsymbole. □

Bemerkung: BIN berechnet in $O(|\mathcal{G}|)$ eine Grammatik der Größe $O(|\mathcal{G}|)$.

- Laufe einmal über alle Regeln.
- Für jede Regel der Größe $n+1$, $n \geq 3$ fügen wir höchstens $n-1$ neue Regeln der Größe 3 hinzu.

Wir definieren die Menge der Nichtterminalsymbole, aus denen das leere Wort abgeleitet werden kann, formal wie folgt:

Def. 3.7: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine CFG. Definiere die Menge $\text{Nullable}(\mathcal{G}) \subseteq N$ als

$$\text{Nullable}(\mathcal{G}) = \{A \in N \mid A \overset{*}{\vdash} \mathcal{G}\varepsilon\}.$$ ◇

Satz 3.4: Es gibt einen Algorithmus, der $\text{Nullable}(\mathcal{G})$ in $O(|\mathcal{G}|^3)$ berechnet.

BEWEIS: Definiere M_i als die Menge der Nichtterminalsymbole, aus denen sich ε mit einem Ableitungsbaum der Höhe $< i$ ableiten lässt:[21]

$$\begin{aligned} M_0 &= \emptyset \\ M_{i+1} &= M_i \cup \{A \mid A \to \alpha \in P \text{ und } \alpha \in M_i^*\} \end{aligned}$$

Es gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $M_i \subseteq N$. Da $|N|$ endlich ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$M_m = M_{m+1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Wir können $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ mit dem folgenden Verfahren in $O(|\mathcal{G}|^3)$ berechnen.

[21] Im Folgenden ist mit $*$ bei M_i^* und M^* der Kleene-Stern gemeint.

```
M = {}
done = false
while (not done):
    done = true
    foreach A → a ∈ P:
        if (A ∉ M ∧ a ∈ M*):
            M = M ∪ A
            done = false
return M
```

Wir zeigen nun, dass $\text{Nullable}(\mathcal{G}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$.

„$\supseteq$“ Wir zeigen via Induktion über die Höhe des Ableitungsbaums i, dass

$$\forall i \in \mathbb{N} : M_i \subseteq \text{Nullable}(\mathcal{G})$$

IA $i = 0$: $M_0 = \emptyset \subseteq \text{Nullable}(\mathcal{G})$

IS $i \rightsquigarrow i + 1$

Wenn $A \in M_{i+1}$, dann

- gilt entweder $A \in M_i \subseteq \text{Nullable}(\mathcal{G})$ nach IV oder
- es existiert $A \to A_1 \dots A_n \in P$ mit $A_j \in M_i$ für $1 \leq j \leq n$. Nach IV existieren Ableitungen

  $$A_j \overset{*}{\vdash} \mathcal{G}\varepsilon$$

  sodass auch eine Ableitung von A nach ε existiert:

  $$A \vdash_{\mathcal{G}} A_1 \dots A_n \overset{*}{\vdash} \mathcal{G} \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{n \text{ Mal}} = \varepsilon$$

  Also gilt $A \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$.

„$\subseteq$“ Wenn $A \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$, dann existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $A \overset{*}{\vdash} \mathcal{G}\varepsilon$ mit einem Ableitungsbaum der Höhe m. Wir zeigen via Induktion über m, dass $A \in M_{m+1} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$.

IA $m = 1$. Die Ableitung ist $A \vdash_{\mathcal{G}} \varepsilon$, sodass $A \in M_1$.

IS $m > 1$. Die Wurzel des Ableitungsbaum muss mit $A \to A_1 \dots A_n$ $(n > 0)$ beschriftet sein und die Kinder sind jeweils Ableitungsbäume für ε in $Abl(A_i)$ der Höhe $m_i \leq m - 1$, wobei $1 \leq i \leq n$.

Es gilt nun nach IV, dass $A_i \in M_{m_i} \subseteq M_{m-1}$. Somit ist $A_i \in M_{m-1}$ und damit, nach Definition, $A \in M_m$. □

Korollar 3.5: Man kann zu einer CFG $\mathcal{G}$ berechnen, ob $\varepsilon \in L(\mathcal{G})$. $\diamond$

BEWEIS: Prüfe, ob $S \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$. $\square$

Lemma 3.6 (DEL)**:** Zu jeder CFG $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ gibt es eine äquivalente CFG $\mathcal{G}' = (\Sigma, N', P', S')$, bei der die einzige ε-Regel $S' \to \varepsilon$ ist (falls $\varepsilon \in L(\mathcal{G})$) und bei der S' auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommt.

BEWEIS:

1. Erweitere $\mathcal{G}$ um ein neues Startsymbol $S' \notin N$ mit $S' \to S$ als neue Regel. Dieser Schritt stellt sicher, dass S' auf keiner rechten Regelseite vorkommt.
2. Wende erst SEP, dann BIN an. Nun hat jede rechte Regelseite die Form $a \in \Sigma$ oder ε oder A oder BC.
3. Für alle Regeln $A \to BC \in P$:
   - Falls $B \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$ füge $A \to C$ hinzu.
   - Falls $C \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$ füge $A \to B$ hinzu.
4. Falls $S \in \text{Nullable}(\mathcal{G})$, füge $S' \to \varepsilon$ hinzu
5. Entferne alle Regeln $A \to \varepsilon$ für $A \neq S'$. $\square$

Bemerkung: DEL kann in $O(|\mathcal{G}|^3)$ berechnet werden und die Größe der resultierenden Grammatik ist $O(|\mathcal{G}|)$.

- Die höchsten Kosten entstehen beim Berechnen von Nullable.
- In Schritt 3 verdoppelt sich die Anzahl der Regeln höchstens.

Def. 3.8: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine Grammatik. Eine *Kettenregel* von $\mathcal{G}$ ist eine Regel in P der Form $A \to B$, wobei $A, B \in N$. $\diamond$

Lemma 3.7 (UNIT)**:** Zu jeder CFG $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ gibt es eine äquivalente CFG $\mathcal{G}' = (N, \Sigma, P', S)$ ohne Kettenregeln.

BEWEIS: Setze zu Anfang $P' = P$ und eliminiere alle Kettenregeln mit folgendem Algorithmus:

1. Betrachte den gerichteten Graphen G mit Knoten N und Kanten für jede Kettenregel, d.h., $\{(A, B) \mid A \to B \in P'\}$.
2. Suche, z.B. mittels Tiefensuche, einen Zyklus in G. Wenn kein Zyklus gefunden wurde, fahre mit Schritt 4 fort.
3. Wurde der Zyklus $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_k \to A_1$ gefunden, dann ersetze in P' alle Vorkommen von A_j mit $j > 1$ durch A_1 (auf linker *und* rechter Regelseite). Entferne dann alle Regeln der Form $A \to A$. Fahre fort mit Schritt 1.

4. Der Graph G ist ein gerichteter azyklischer Graph (DAG) (engl. *directed acyclic graph*). Sortiere die Knoten von G topologisch als $A_1, \ldots, A_n$, sodass A_n auf keiner linken Seite einer Kettenregel vorkommt.
5. **for** $j = n-1, \ldots, 1$

   for each $A_j \to A_k \in P'$

   (wegen topologischer Sortierung gilt $k > j$)

   entferne $A_j \to A_k$ aus P'

   füge $A_j \to BC$ zu P' hinzu, falls $A_k \to BC \in P', \quad B, C \in N$.

   füge $A_j \to a$ zu P' hinzu, falls $A_k \to a \in P', \quad a \in \Sigma$.

   Die äußere Schleife hat die Invariante, dass am Ende jedes Durchlaufs für $n \geq i \geq j$ keine Kettenregel $A_i \to \ldots$ in P' existiert. Beim Verlassen der Schleife ist $j = 1$ und es existieren überhaupt keine Kettenregeln mehr. □

Bemerkung: UNIT kann in $O(|\mathcal{G}|^3)$ berechnet werden und die Größe der resultierenden Grammatik ist $O(|\mathcal{G}|^2)$.

- Die innere Schleife in Schritt 5 wird nur einmal pro Regel ausgeführt.
- In Schritt 5 kommen keine neuen Kettenregeln hinzu.
- Es gibt nur höchstens $|P'|$ neue Regeln in der inneren Schleife.

Vorlesung: 29.11.2017

Def. 3.9: Eine CFG $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls jede Regel die Form $A \to a$, $A \to BC$, oder $S \to \varepsilon$ hat, wobei $A, B, C \in N$, $a \in \Sigma$. Falls $S \to \varepsilon \in P$, dann darf S auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommen. ◇

Satz 3.8: Zu jeder CFG existiert eine äquivalente CFG in CNF.

BEWEIS: Wir erhalten eine äquivalente CFG in CNF, indem wir der Reihe nach SEP, BIN, DEL und UNIT anwenden.[22] □

Bemerkung: Die Transformation in CNF benötigt Zeit $O(|\mathcal{G}|^3)$. Die Größe der CNF-Grammatik ist $O(|\mathcal{G}|^2)$.

Lemma 3.9: Die Menge der Typ-2-Sprachen ist eine Teilmenge der Typ-1-Sprachen.

BEWEIS: Zu jeder Typ-2-Grammatik existiert eine äquivalente ε-freie Typ-2-Grammatik. Diese ist nach Definition auch eine Typ-1-Grammatik. □

[22] Es genügt sogar nur DEL und dann UNIT anzuwenden, da DEL schon SEP und BIN ausführt.

3.3 Wortproblem und Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen

Satz 3.10: Es gibt einen Algorithmus, der für eine beliebige kontextfreie Sprache L das Wortproblem „$w \in L$“ in $O(n^3)$ Schritten und mit $O(n^2)$ Speicherplatz entscheidet.

Beweis (CYK-Algorithmus): Sei $\mathcal{G}$ eine CFG in CNF und sei $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$. Der CYK-Algorithmus berechnet bei Eingabe von $\mathcal{G}$ und w, ob $w \in L(\mathcal{G})$.

Idee: Definiere für $1 \leq i < j \leq n$:

$$M_{ij} = \{A \in N \mid A \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} a_i \dots a_j\}$$

Es gilt für $i = j$

$$M_{ii} = \{A \mid A \to a_i\}$$

Es gilt für $i < j$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \{A \mid A \to BC \wedge BC \overset{*}{\vdash} \mathcal{G} a_i \dots a_j\} \\ &= \{A \mid A \to BC \wedge \exists k : i \leq k < j \quad B \overset{*}{\vdash} \mathcal{G} a_i \dots a_k \wedge C \overset{*}{\vdash} \mathcal{G} a_{k+1} \dots a_j\} \\ &= \{A \mid A \to BC \wedge \exists k : i \leq k < j \quad B \in M_{ik} \wedge C \in M_{(k+1)j}\} \end{aligned}$$

Es gilt:

- Wir können die M_{ij} als eine $(n \times n)$-Matrix M mit Einträgen in $\mathcal{P}(N)$ darstellen.
- Der Wert von M_{ij} hängt nur von $M_{i'j'}$ mit $i' > i, j' \leq j$ oder $i' \geq i, j' < j$ ab.
- $w \in L$ genau dann, wenn $S \vdash^* w$ genau dann, wenn $S \in M_{1n}$.

Wir können die M_{ij} mit dem folgenden Verfahren ermitteln:

CYK($\mathcal{G}, a_1, \dots, a_n$)

$M = n \times n$-Matrix mit (initial) $M_{ij} = \varnothing$ für alle i, j // $O(n^2)$
for i=1 .. n **do** // $O(|\mathcal{G}|) \cdot O(n)$
  $M_{ii} = \{A \mid A \to a_i\}$
for i=n−1 .. 1 **do**
  for j=i+1 .. n **do**
    for k=i .. j−1 **do** // $O(|\mathcal{G}|) \cdot O(n^3)$
      $M_{ij} = M_{ij} \cup \{A \mid A \to BC, B \in M_{ik}, C \in M_{(k+1)j}\}$
return $S \in M_{1n}$ □

Bsp. 3.8: $L = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$ mit Grammatik (CFG) mit folgenden Regeln.

$$S \to XY$$
$$X \to ab \mid aXb$$
$$Y \to c \mid cY$$

In CNF: $S \to XY$
$X \to AB \mid AZ$
$Z \to XB$
$Y \to CY|c$
$A \to a, B \to b, C \to c$

Beispiel der Matrix für $w = aaabbbcc$. Zellen, die mit „•“ markiert sind, sind leer. Die Reihenfolge, in der die nicht-diagonalen, nicht leeren Zellen eingetragen wurden, ist mit kleinen Zahlen markiert. Beispielsweise wurde $M_{35} = \{Z\}$ mit Zahl „3“ *nach* $M_{78} = \{Y\}$ mit Zahl „1“ eingetragen. Da $S \in M_{1n} = \{S\}$, gilt $w \in L$.

	A	•	•	•	•	X 6	S 7	S 8
a		A	•	•	X 4	Z 5	•	•
	a		A	X 2	Z 3	•	•	•
		a		B	•	•	•	•
			b		B	•	•	•
				b		B	•	•
					b		C, Y	Y 1
						c		C, Y
							c	

Satz 3.11: Es gibt einen Algorithmus, der das Leerheitsproblem[23] für kontextfreie Sprachen in $O(|\mathcal{G}|)$ entscheidet.

Beweis: Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine CFG für L. Wir definieren die Menge M der coerreichbaren Nichtterminalsymbole.

$$M = \{A \mid A \overset{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} w, w \in \Sigma^*\}$$

Offensichtlich gilt: $L = \varnothing \Leftrightarrow S \notin M$.

[23] Gefragt ist, ob $L(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\vdash} w\} \overset{?}{=} \varnothing$.

Wir können M induktiv berechnen. Wir definieren hierfür:

$$M_0 = \{A \mid A \to w \in P, w \in \Sigma^*\}$$
$$M_{i+1} = M_i \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in (\Sigma \cup M_i)^*\}$$

Offensichtlich gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ $M_i \subseteq M_{i+}$ und $M_i \subseteq M$. Da $M \subseteq N$ endlich ist, gibt es ein n, sodass $M_n = M_{n+1}$ (hier ohne Beweis).

Wir können daher M analog zu Nullable($\mathcal{G}$) (siehe Satz 3.4) in $O(|\mathcal{G}|)$ berechnen. □

Bem.: Wenn wir in einer Grammatik $\mathcal{G}$ ein nicht co-erreichbares Nichtterminalsymbol (und alle zugehörigen Regeln) entfernen, ändert sich $L(\mathcal{G})$ nicht. Wir können eine gegebene Grammatik also optimieren, indem wir alle nicht co-erreichbaren Nichtterminalsymbole entfernen.

3.4 Einschub: Typ-3-Sprachen

Vorlesung: 1.12.2017

Satz 3.12: L ist regulär $\Leftrightarrow$ L ist Typ-3-Sprache.

Beweis: „⇒“ Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ DEA für L.
Konstruiere Typ-3-Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$N = Q$$
$$S = q^{\mathsf{init}}$$
$$P = \{q \to aq' \mid q, q' \in Q, a \in \Sigma, \delta(q, a) = q'\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in F\}$$

Es gilt $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{A})$. (ohne Beweis)

„⇐“ Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ Typ-3-Grammatik. Dann erhalten wir durch Anwenden von Bin eine äquivalente Grammatik, in der jede Regel eine der folgenden Formen hat:

$$\begin{array}{ll} A \to \varepsilon & \text{für } A \in N \\ A \to a & \text{für } A \in N, a \in \Sigma \\ A \to a_1 a_2 & \text{für } A \in N, a_1, a_2 \in \Sigma \\ A \to aB & \text{für } A \in N, a \in \Sigma, B \in N \end{array}$$

Wir machen nun die folgenden Modifikationen.

- Wir fügen eine frische Variable Y_ε und die Regel $Y_\varepsilon \to \varepsilon$ hinzu.
- Wir löschen jede Regel der zweiten Form und führen stattdessen die Regel $A \to aY_\varepsilon$ ein.

- Wir löschen jede Regel der dritten Form und führen stattdessen eine frische Variable Y_{a_2} und die Regeln $A \to a_1 Y_{a_2}$ und $Y_{a_2} \to a_2 Y_\varepsilon$ ein.

Die resultierende Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N', P', S)$ ist äquivalent zu $\mathcal{G}$. (Ohne Beweis)

Wir konstruieren nun den folgenden NEA. $\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$

$$\begin{aligned} Q &= N' \\ B \in \delta(A, a) \text{ gdw } & A \to aB \in P' \\ q^{\mathsf{init}} &= S \\ F &= \{A \in N' \mid A \to \varepsilon \in P'\} \end{aligned}$$

Es gilt $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{A})$. (ohne Beweis) □

Lemma 3.13: $\mathcal{M}_3 \subsetneq \mathcal{M}_2$ (d.h., die regulären Sprachen sind eine *echte* Teilmenge der kontextfreien Sprachen).

Beweis: Betrachte $L_{\text{centered}} = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0,1\}^*$
Sowohl aus Bsp. 2.11 als auch aus Bsp. 2.13 ist bekannt, dass L_{centered} nicht regulär ist.
Es gibt aber eine Typ-2-Grammatik für L_{centered}:

$$\mathcal{G} = (\{0,1\}, \{S\}, \{S \to 1, S \to 0S0\}, S)$$

(ohne Beweis) □

4 Kellerautomaten pushdown automaton (PDA)

Die im letzten Kapitel vorstellten kontextfreien Sprachen können wir bisher nur mit Hilfe von kontextfreien Grammatiken darstellen. Für die regulären Sprachen aus Kapitel 2 haben wir dagegen mit DEAs, NEAs, ε-NEAs, regulären Ausdrücken und regulären Grammatiken verschiedene Darstellungsformen kennengelernt. Die Automaten hatten dabei für uns einen besonderen Reiz, da diese Darstellungsform Ähnlichkeiten mit Computern hat. In diesem Kapitel werden wir nun den Kellerautomaten, ein Automatenmodell für die kontextfreien Sprachen, kennenlernen.

Ein Kellerautomat ist im wesentlichen ein ε-NEA, der um einen Stapelspeicher mit unbeschränkter Kapazität erweitert wurde.

Bei jedem Zustandsübergang darf der Kellerautomat das oberste Element des Stapelspeichers inspizieren und durch eine (potentiell leere) Sequenz von Elementen ersetzen. Der Automat darf dabei die Entscheidung über den Folgezustand vom inspizierten Element abhängig machen. Zu Beginn liegt genau ein Element, das *Kellerbodensymbol*, auf dem Stapelspeicher.

Der Kellerautomat unterscheidet sich noch in einem weiteren Detail vom ε-NEA: Es gibt keine akzeptierende Zustände. Der Kellerautomat akzeptiert stattdessen, wenn am Ende eines Zustandsübergangs das Eingabewort komplett gelesen wurde und der Stapelspeicher leer ist.

Analog zu endlichen Automaten können wir auch Kellerautomaten mit Hilfe eines Zustandsdiagramms beschreiben. Ein Beispiel ist in Abb. 5 dargestellt. Alle Transitionen sind mit einem Tripel beschriftet. Die erste Komponente des Tripels ist dabei das gelesene Zeichen der Eingabe, die zweite Komponente ist das vom Stapelspeicher genommene Element und die dritte Komponente ist die Sequenz, die auf den Stapelspeicher gelegt wird.

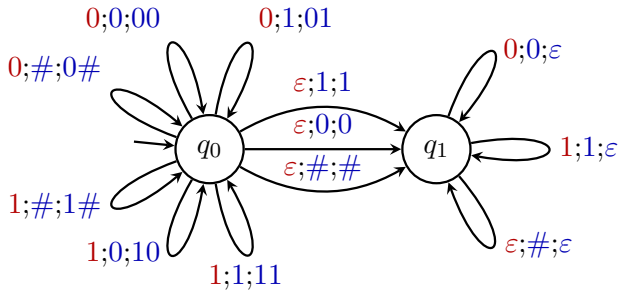


Abb. 5: Zustandsdiagramm eines Kellerautomaten

Der in Abb. 5 dargestellte Kellerautomat akzeptiert die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}\}$

und verwendet das Zeichen # als Kellerbodensymbol. In Zustand q_0 wird für jedes Eingabezeichen das entsprechende Symbol auf den Stapelspeicher gelegt. Zu jedem Zeitpunkt kann der Automat nichtdeterministisch (mit Hilfe einer ε-Transition) in den Zustand q_1 wechseln. Diese Transition sollte genau bei der Hälfte des Eingabeworts genommen werden. In Zustand q_1 vergleicht der Automat sukzessive die verbleibenden Eingabesymbole mit dem Inhalt des Stapelspeichers. Nur bei Übereinstimmung wird der Stapelspeicher bis zum Kellerbodensymbol geleert. Falls nur noch das Kellerbodensymbol auf dem Stapelspeicher liegt, kann der Automat dieses mit der Transition „$\varepsilon; \#; \varepsilon$“ entfernen und die Eingabe akzeptieren.

Auf Englisch heißen Kellerautomaten *pushdown automata* und wir werden die Abkürzung PDA für Kellerautomaten verwenden. In diesem Kapitel befassen wir uns zunächst nur mit nichtdeterministischen Kellerautomaten und definieren diese formal wie folgt.

Def. 4.1: Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA)[24] ist ein 6-Tupel

$$(\Sigma, Q, \Gamma, q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, \delta).$$

Dabei ist

- Σ ein Alphabet, das wir auch *Eingabealphabet* nennen,
- Q eine endliche Menge, deren Elemente wir *Zustände* nennen,
- Γ ein Alphabet, das wir auch *Kelleralphabet* nennen,
- $q^{\mathsf{init}} \in Q$ ein Zustand, den wir Startzustand nennen,
- $Z^{\mathsf{init}} \in \Gamma$ ein Zeichen, das wir *Kellerbodensymbol* nennen,
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ eine Funktion, die wir *Transitionsfunktion* nennen. ◇

Bsp. 4.1: Wir beschreiben den in Abb. 5 abgebildeten Kellerautomaten formal wie folgt.

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{0,1\} && \text{Eingabealphabet} \\
\Gamma &= \{0,1,\#\} && \text{Kelleralphabet} \\
Q &= \{q_0, q_1\} && \# \mathrel{\hat{=}} \text{Kellerbodensymbol} \\
\delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, aZ)\} && a \in \{0,1\}, Z \in \Gamma \quad (1) \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z) &= \{(q_1, Z)\} && (2) \\
\delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \varepsilon)\} && (3) \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) &= \{(q_1, \varepsilon)\} && (4)
\end{aligned}$$

[24] Englisch: Nondeterministic Pushdown Automaton

Hat die graphische Darstellung eines Kellerautomaten sehr viele Transitionen müssen wir diese nicht alle explizit Zeichnen. Statt dessen können wir auch wie in Abb. 6 Variablen verwenden um mehrere Transitionen zusammenzufassen.

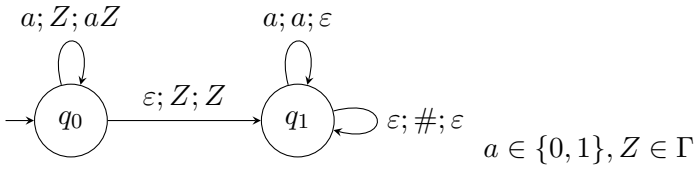


Abb. 6: Zustandsdiagramm der Kellerautomaten aus Abb. 5. Statt alle Transitionen explizit zu zeichnen verwenden wir die Variablen a und Z um eine Menge von Transitionen durch eine einzige Kante zu repräsentieren.

Im Weiteren sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, \delta)$ ein NPDA.

Def. 4.2: Die Menge der *Konfigurationen* von $\mathcal{K}$ ist $\mathrm{Konf}(\mathcal{K}) = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.
Die *Schrittrelation* von $\mathcal{K}$

$$\rhd \subseteq \mathrm{Konf}(\mathcal{K}) \times \mathrm{Konf}(\mathcal{K})$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} (q, aw, Z\gamma) &\rhd (q', w, \beta\gamma) && \text{falls } \delta(q, a, Z) \ni (q', \beta) \\ (q, w, Z\gamma) &\rhd (q', w, \beta\gamma) && \text{falls } \delta(q, \varepsilon, Z) \ni (q', \beta). \end{aligned}$$

Wir schreiben $(q, w, \gamma) \rhd^n (q', w', \gamma')$, wenn $\mathcal{K}$ in $n \in \mathbb{N}$ Schritten von Konfiguration (q, w, γ) in Konfiguration (q', w', γ') gelangt.

Wir schreiben $\rhd^*$ für die reflexive, transitive Hülle von $\rhd$. Falls $(q, w, \gamma) \rhd^* (q', w', \gamma')$, so existiert also $n \in \mathbb{N}$, sodass $(q, w, \gamma) \rhd^n (q', w', \gamma')$.

Die von $\mathcal{K}$ *akzeptierte Sprache* ist

$$L(\mathcal{K}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q : (q^{\mathsf{init}}, w, Z^{\mathsf{init}}) \rhd^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

Wir nennen eine Konfiguration der Form $(q, \varepsilon, \varepsilon)$ mit $q \in Q$ eine *akzeptierende Konfiguration.* ◇

Bsp.: Die folgenden Schritte von $\mathcal{K}$ aus Beispiel 4.1 zeigen, dass $w = 0110 \in L(\mathcal{K})$:

Vorlesung: 6.12.2017

$$
\begin{array}{ll}
& (q_0, 0110, \#) \\
\rhd & (q_0, 110, 0\#) \quad (\text{„pushen“ des Eingabesymbols 0}) \\
\rhd & (q_0, 10, 10\#) \quad (\text{„pushen“ des Eingabesymbols 1}) \\
\rhd & (q_1, 10, 10\#) \quad (\varepsilon\text{-Übergang von } q_0 \text{ nach } q_1) \\
\rhd & (q_1, 0, 0\#) \quad (\text{„poppen“ des Eingabesymbols 1}) \\
\rhd & (q_1, \varepsilon, \#) \quad (\text{„poppen“ des Eingabesymbols 0}) \\
\rhd & (q_1, \varepsilon, \varepsilon) \quad (\varepsilon\text{-Übergang zum Entfernen von } \#)
\end{array}
$$

Lemma 4.1: Zu jeder CFG $\mathcal{G}$ gibt es einen NPDA $\mathcal{K}$, sodass $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{G})$.

Zum Führen des Beweises benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.2 (Mehr Keller – mehr Möglichkeiten.)**:** Für alle $q, q' \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Wenn } (q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon), \text{dann } \forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma).$$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Beweis (von Lemma 4.1): Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik für L in CNF. Definiere einen NPDA $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, \delta)$ durch:

- $Q = \{q^{\mathsf{init}}\}$
- $\Gamma = \Sigma \dot\cup N$
- $Z^{\mathsf{init}} = S$
- $\delta(q^{\mathsf{init}}, a, a) = \{(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon)\}$ für $a \in \Sigma$
- $\delta(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, A) = \{(q^{\mathsf{init}}, \alpha)\}$ für $A \to \alpha \in P$

Wir zeigen nun, dass $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{G})$.

- Beweisrichtung „$\supseteq$“

  Sei $w \in L(\mathcal{G})$, dann gilt $S \overset{*}{\vdash} w$. Wir wollen zeigen dass $(q^{\mathsf{init}}, w, S) \rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$ folgt und beweisen dafür via vollständige Induktion über die Länge der Ableitung die folgende stärkere Eigenschaft.

  $$\forall A \in N : \text{ wenn } A \overset{*}{\vdash} w, \text{dann } (q^{\mathsf{init}}, w, A) \rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$$

  I.A.: $n = 1$: Es gibt nur zwei Arten von Regeln, die für Ableitungen der Länge 1 in Frage kommen:

- $S \to \varepsilon$. Per Konstruktion gilt $(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon) \in \delta(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, S)$ und somit $(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, S) \rhd (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$.
- $A \to a$, $a \in \Sigma$. Per Konstruktion gilt $(q^{\mathsf{init}}, a) \in \delta(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, A)$ und $(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon) \in \delta(q^{\mathsf{init}}, a, a)$.

  Somit gilt $(q^{\mathsf{init}}, a, A) \rhd (q^{\mathsf{init}}, a, a) \rhd (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$.

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$: In diesem Fall verwendet der erste Ableitungsschritt eine Regel der Form $\pi = A \to BC$ mit $B, C \in N$. Wir betrachten den zugehörigen Ableitungsbaum $\mathcal{T} = \pi(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, $\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Abl}(B)$, $\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Abl}(C)$, $w = Y(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2)$.

Per Konstruktion gilt $(q^{\mathsf{init}}, BC) \in \delta(q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, A)$.

Ferner gilt per I.V., dass $(q^{\mathsf{init}}, Y(\mathcal{T}_1), B) \rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$ und $(q^{\mathsf{init}}, Y(\mathcal{T}_2), C) \rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$.

Mit Lemma 4.2 folgt schließlich:

$$\begin{aligned}(q^{\mathsf{init}}, w, A) = (q^{\mathsf{init}}, Y(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2), A) &\rhd (q^{\mathsf{init}}, Y(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2), BC)\\ &\rhd^* (q^{\mathsf{init}}, Y(\mathcal{T}_2), C)\\ &\rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

- Beweisrichtung „$\subseteq$“

  Sei $w \in L(\mathcal{K})$, dann gilt $(q^{\mathsf{init}}, w, S) \rhd^* (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir wollen $S \overset{*}{\vdash} w$ folgern und beweisen dafür via vollständige Induktion über die Anzahl der Berechnungsschritte n die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall w \in \Sigma^*, \alpha \in \Gamma^* : \text{ wenn } (q^{\mathsf{init}}, w, \alpha) \rhd^n (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon), \text{dann } \alpha \overset{*}{\vdash} w$$

  I.A. $n = 0$. $w = \varepsilon$, $\alpha = \varepsilon$: Es gilt $\varepsilon \overset{*}{\vdash} \varepsilon$.

  I.S. $n > 0$, $\alpha = Z\alpha'$: Es gilt $(q^{\mathsf{init}}, w, Z\alpha') \rhd (q^{\mathsf{init}}, w', \beta\alpha') \rhd^{n-1} (q^{\mathsf{init}}, \varepsilon, \varepsilon)$, $\delta(q^{\mathsf{init}}, x, Z) \ni (q^{\mathsf{init}}, \beta)$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

  Es gibt zwei Fälle für Z:

  - $Z = a$ für $a \in \Sigma$. Es folgt $\beta = \varepsilon$, $w = aw'$ und $x = a$.

    Per I.V. gilt $\alpha' \overset{*}{\vdash} w'$ und somit auch $\alpha = a\alpha' \overset{*}{\vdash} aw' = w$.
  - $Z = A$ mit $A \to \beta \in P$. Es folgt $w = w'$ und $x = \varepsilon$.

    Per I.V. gilt $\beta\alpha' \overset{*}{\vdash} w'$ und somit auch $A\alpha \vdash \beta\alpha' \overset{*}{\vdash} w' = w$. □

Bei einem NPDA nehmen wir in jedem Schritt ein Zeichen vom Kellerspeicher herunter, aber dürfen beliebig viele Symbole auf den Kellerspeicher zurücklegen. Was wäre, wenn die Höhe des Kellers pro Schritt höchstens um eins größer werden könnte? Verlören wir dadurch nur Komfort oder könnten wir dadurch weniger Sprachen akzeptieren?

Das folgende Lemma beantwortet diese Frage.

Lemma 4.3: Zu jedem NPDA gibt es einen äquivalenten NPDA, bei dem für alle $q, q \in Q, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*, x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ gilt: Falls $(q', \gamma) \in \delta(q, x, Z)$, dann $|\gamma| \leq 2$.

Beweis: Sei $(q', \gamma) \in \delta(q, x, Z)$ mit $\gamma = Z_n \dots Z_1$ für $n > 2$:

- neue Zustände $q_2 \dots q_{n-1}$
- Ersetze (q', γ) durch $(q_2, Z_2 Z_1)$
- Definiere $\delta(q_i, \varepsilon, Z_i) = \{(q_{i+1}, Z_{i+1} Z_i)\}$, für $2 \leq i < n-1$
- Definiere $\delta(q_{n-1}, \varepsilon, Z_{n-1}) = \{(q', Z_n Z_{n-1})\}$

Wiederhole bis alle Transitionen die gewünschte Form haben. Die Sprache des NPDA ändert sich durch diese Transformation nicht (ohne Beweis). □

Vorlesung: 8.12.2017

Lemma 4.4: Zu jedem NPDA $\mathcal{K}$ gibt es eine CFG $\mathcal{G}$, sodass $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{G})$.

Beweis: Ohne Einschränkung (Lemma 4.3) sei $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, \delta)$ ein NPDA mit $|\gamma| \leq 2$ für alle $(q', \gamma) \in \delta(q, x, Z), q, q' \in Q, x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$.

Definiere $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit $N = (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$. Bevor wir P beschreiben, wollen wir zunächst die Intuition hinter den Nichtterminalsymbolen vermitteln.

Die dieser Konstruktion zugrunde liegende Idee wird durch die folgende Eigenschaft beschrieben:

$$[q, Z, q'] \overset{n}{\vdash} w \text{ gdw } (q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon) \qquad (*)$$

In Worten: Wir können vom Nichtterminalsymbol $[q, Z, q']$ das Wort w genau dann in n Schritten ableiten, wenn der NPDA die Konfiguration (q, w, Z) in n Schritten in eine akzeptierende Konfiguration mit Zustand q' überführen kann.

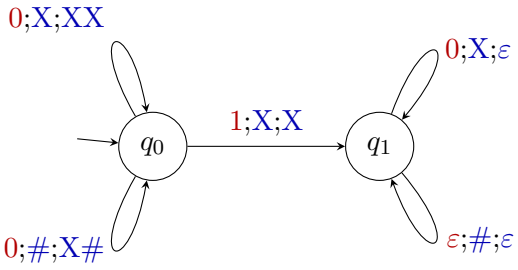
Mit dieser Intuition können wir nun die Menge der Produktionsregeln angeben. Wir definieren $P = P_S \cup P_0 \cup P_1 \cup P_2$ mit:

$$P_S = \{S \to [q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, q'] \mid q' \in Q\},$$
$$P_0 = \{[q, Z, q'] \to x \mid (q', \varepsilon) \in \delta(q, x, Z), x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\},$$
$$P_1 = \{[q, Z, q'] \to x[q'', Z', q'] \mid (q'', Z') \in \delta(q, x, Z), q' \in Q, x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\},$$
$$P_2 = \{[q, Z, q'] \to x[q_1, Z_1, q_2][q_2, Z_2, q'] \mid (q_1, Z_1 Z_2) \in \delta(q, x, Z), q', q_2 \in Q, x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$$

Dabei unterscheiden P_0, P_1 und P_2 die Fälle, dass der Stack kleiner wird (P_0), gleich hoch bleibt (P_1) oder größer wird (P_2).

Beispiel:

NPDA für $L_{\text{centered3}} := \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\} \subseteq \{0,1\}^*$:



010 wird akzeptiert, weil $(q_0, 010, \#) \rhd (q_0, 10, X\#) \rhd (q_1, 0, X\#) \rhd (q_1, \varepsilon, \#) \rhd (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

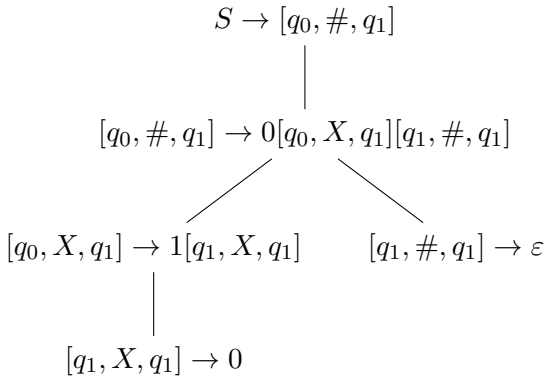
$$
\begin{aligned}
P_S = \{&S \to [q_0, \#, q_0] \\
&S \to [q_0, \#, q_1]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0 = \{&[q_1, X, q_1] \to 0 \\
&[q_1, \#, q_1] \to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 = \{&[q_0, X, q_0] \to 1[q_1, X, q_0] \\
&[q_0, X, q_1] \to 1[q_1, X, q_1]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2 = \{&[q_0, \#, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, \#, q_0] \\
&[q_0, \#, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, \#, q_0] \\
&[q_0, \#, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, \#, q_1] \\
&[q_0, \#, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, \#, q_1] \\
&[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0] \\
&[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0] \\
&[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1] \\
&[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]\}
\end{aligned}
$$

Ableitungsbaum für 010:



Offensichtlich folgt aus dieser Eigenschaft $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{K})$, da wir vom Startsymbol S genau die Nichtterminalsymbole der Form $[q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, q']$ ableiten können und der NPDA genau die Wörter w akzeptiert, für die $(q^{\mathsf{init}}, w, Z^{\mathsf{init}})$ in eine akzeptierende Konfiguration überführt werden kann.

Es bleibt zu zeigen, dass die Eigenschaft $(*)$ gilt. Für den Fall $n = 1$ folgt die Eigenschaft direkt aus den P_0-Regeln (und der Tatsache, dass keine der anderen Regeln ein einzelnes Symbol oder ε ableiten kann).

- Beweisrichtung „$\Rightarrow$“ Wir zeigen diese Richtung via vollständige Induktion über die Anzahl der Ableitungsschritte.

  I.A. $n = 1$: Folgt wie oben erwähnt aus den P_0-Regeln.

  I.S. $n \rightsquigarrow n + 1$: Sei $[q, Z, q'] \vdash \alpha \overset{n}{\vdash} w$ eine Ableitung für w. Für den ersten Ableitungsschritt kommen zwei Fälle in Frage:

  – Fall 1: α hat die Form $x[q'', Z', q']$ ($[q, Z, q'] \to \alpha \in P_1$).

  Es folgt $w = xw'$ für ein w' mit $[q'', Z', q'] \overset{n}{\vdash} w'$.

  Nach I.V. gilt nun, dass $(q'', w', Z') \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$.

  Nach Konstruktion gilt $\delta(q, x, Z) \ni (q'', Z'), q'' \in Q, x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und somit $(q, w, Z) \rhd (q'', w', Z') \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$.

  – Fall 2: α hat die Form $x[q_1, Z_1, q_2][q_2, Z_2, q']$ ($[q, Z, q'] \to \alpha \in P_2$).

  Es gibt also einen Ableitungsbaum $\mathcal{T} = \pi(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, mit $\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Abl}([q_1, Z_1, q_2])$ und $\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Abl}([q_2, Z_2, q'])$, sodass $w = xY(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2)$.

  Es gilt also $[q_1, Z_1, q_2] \overset{k_1}{\vdash} Y(\mathcal{T}_1)$ und $[q_2, Z_2, q'] \overset{k_2}{\vdash} Y(\mathcal{T}_2)$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, sodass $k_1 + k_2 = n$.

  Per I.V. folgt

  $$(q_1, Y(\mathcal{T}_1), Z_1) \rhd^{k_1} (q_2, \varepsilon, \varepsilon).$$

  Mit Lemma 4.2 folgt auch

  $$(q_1, Y(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2), Z_1Z_2) \rhd^{k_1} (q_2, Y(\mathcal{T}_2), Z_2).$$

  Auch hier können wir wieder I.V. anwenden und erhalten:

  $$(q_2, Y(\mathcal{T}_2), Z_2) \rhd^{k_2} (q', \varepsilon, \varepsilon)$$

  Somit gilt:

  $$(q, \underbrace{xY(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2)}_{w}, Z) \rhd (q_1, Y(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2), Z_1Z_2) \rhd^{k_1} (q_2, Y(\mathcal{T}_2), Z_2) \rhd^{k_2} (q', \varepsilon, \varepsilon)$$

Beweisrichtung „⇐“ Wir zeigen diese Richtung via vollständige Induktion über die Anzahl der Berechnungsschritte des NPDA.

Vorlesung: 13.12.2017

I.A. $n = 1$: Folgt wie oben erwähnt aus den P_0-Regeln.

I.S. $n \rightsquigarrow n + 1$:

Sei $(q, w, Z) \rhd^{n+1} (q', \varepsilon, \varepsilon)$ eine Berechnung für w. Da wir annehmen, dass der NPDA in einem Schritt höchstens zwei Symbole auf den Stack legen darf, kommen für den ersten Berechnungsschritt nur zwei Fälle in Frage:

- Fall 1: $(q, w, Z) \rhd (q'', w', Z')$ mit $w = xw'$ für $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

  Aus $(q'', w', Z') \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$ folgern wir mit I.V. $[q'', Z', q'] \vdash^n w'$. Nach Konstruktion können wir $[q, Z, q'] \vdash x[q'', Z', q']$ ableiten.

- Fall 2: $(q, w, Z) \rhd (q_1, w', Z_1 Z_2)$ mit $w = xw'$ für $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

  Aus $(q_1, w', Z_1 Z_2) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$ folgern wir: $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ q_2 \in Q,\ w_1, w_2 \in \Sigma^*$, sodass gilt:

  1. $k_1 + k_2 = n$
  2. $w' = w_1 w_2$
  3. $(q_1, w', Z_1 Z_2) \rhd^{k_1} (q_2, w_2, Z_2)$
  4. $(q_2, w_2, Z_2) \rhd^{k_2} (q', \varepsilon, \varepsilon)$

  Wir wählen k_1 als die kleinste Zahl, welche die obigen Eigenschaften erfüllt. Damit wissen wir, dass wir Z_2 noch nie vom Keller genommen haben.

  Aus 3. folgern wir $(q_1, w_1, Z_1) \rhd^{k_1} (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$ und mit I.V. $[q_1, Z_1, q_2] \vdash^{k_1} w_1$.

  Aus 4. folgern wir mit I.V. $[q_2, Z_2, q'] \vdash^{k_2} w_2$.

  Es gibt also einen Ableitungsbaum $\mathcal{T} = \pi(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, mit $\mathcal{T}_1 \in \mathrm{Abl}([q_1, Z_1, q_2])$ und $\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Abl}([q_2, Z_2, q'])$, sodass $w = xY(\mathcal{T}_1)Y(\mathcal{T}_2)$.

  Somit gibt es auch eine Ableitung

$$[q, Z, q'] \vdash x[q_1, Z_1, q_2][q_2, Z_2, q'] \vdash^{k_1+k_2} xw_1w_2. \qquad \square$$

Satz 4.5: Die Menge der von Kellerautomaten akzeptierten Sprachen und die Menge der kontextfreien Sprachen sind identisch.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 4.1 und Lemma 4.4. $\square$

Bemerkung: Zu jedem NPDA gibt es einen äquivalenten NPDA, der nur einen Zustand hat. (Folgt aus Lemma 4.4 und der Konstruktion aus dem Beweis von Lemma 4.1.)

5 Kontextfreie Sprachen – Teil 2

5.1 Das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen

Satz 5.1 (Pumping Lemma für CFL)**:** Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\exists n \in \mathbb{N},\ n > 0 : \quad \forall z \in L,\ |z| \geq n : \\ &\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : \\ &z = uvwxy,\ |vwx| \leq n,\ |vx| \geq 1 \\ \text{und } &\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L \end{aligned}$$

Lemma 5.2: In jedem Binärbaum (Baum, bei dem jeder innere Knoten zwei Nachfolger hat) mit $\geq 2^k$ Blättern gibt es mindestens einen Pfad der Länge $\geq k$ von einem Blatt zur Wurzel.

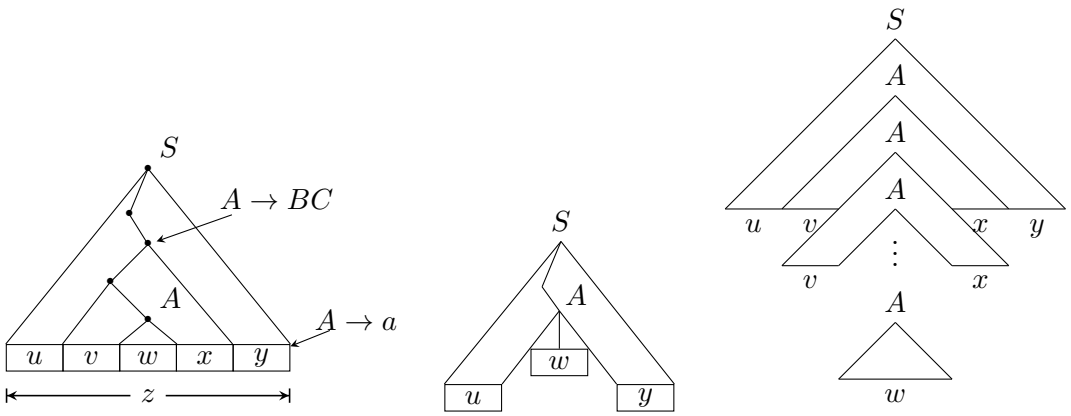
(ohne Beweis)

Beweis (von Satz 5.1): Sei $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ in CNF mit $L(\mathcal{G}) = L$. Wähle $n = 2^{|N|}$.

Betrachte den Ableitungsbaum $\mathcal{T} \in \text{Abl}(S)$ für ein Wort z mit $|z| \geq n$. $\mathcal{T}$ ist ein Binärbaum mit $|z| \geq n = 2^{|N|}$ Blättern. In einem solchen Binärbaum existiert nach Lemma 5.2 ein Pfad ζ der Länge $\geq |N|$. Auf ζ liegen $\geq |N| + 1$ Nichtterminalsymbole. Es muss also mindestens ein Nichtterminalsymbol A mehrmals vorkommen.

Folge ζ vom Blatt in Richtung Wurzel, bis sich ein Nichtterminalsymbol A das erste Mal wiederholt. Das geschieht nach $\leq |N|$ Schritten. Teile $z = uvwxy$ wie in Abb. 7a skizziert. Es gilt:

- $|vx| \geq 1$, da ζ entweder durch B oder durch C läuft. Angenommen, ζ verläuft durch B. Somit muss $C \overset{*}{\vdash} x$ gelten. In CNF ist $C \overset{*}{\vdash} \varepsilon$ nicht möglich und somit ist $|x| \geq 1$. Der Fall, dass ζ durch C verläuft, ist analog.
- $|vwx| \leq 2^{|N|} = n$, da das obere A höchstens $|N|$ Schritte von der Blattebene entfernt und $\mathcal{T}$ ein Binärbaum ist.
- Für die Aussage $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$ unterscheiden wir drei Fälle:
  - $i = 0$: Aus dem „unteren“ A haben wir w abgeleitet, aus dem oberen A haben wir vwx abgeleitet. Wir könnten also auch aus dem oberen A direkt w ableiten und erhalten $S \vdash^* uwy$. (Siehe Abb. 7b).
  - $i = 1$: Gilt trivialerweise, da $uv^1wx^1y = z$.
  - $i \geq 1$: Aus dem „oberen“ A haben wir vAx abgeleitet, aus dem unteren A haben wir w abgeleitet. Wir könnten also auch aus dem unteren A nochmal vAx ableiten. Wenn wir dies oft genug wiederholen, können wir jedes $uv^i wx^i y$ mit $i \geq 2$ erzeugen (siehe auch Abb. 7c).



(a) Zerlegung $z = uvwxy$ **(b)** $uwy \in L$ **(c)** $uv^iwx^iy \in L$

Abb. 7: Erklärung zu Satz 5.1

□

Vorlesung: 15.12.2017

Lemma 5.3: Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis: Wir nehmen an, L wäre kontextfrei. Sei n die Konstante aus dem PL. Wir betrachten $z = a^n b^n c^n$. Es gilt also $|z| = 3n \geq n$. Dann gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$. Wir zeigen nun, dass $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$ nicht gilt (und folgern, dass unsere Annahme falsch war).

Durch $|vwx| \leq n$ ergeben sich für vwx folgende Möglichkeiten:

- $vwx = a^j$: Für $i = 0$ ist $v^0wx^0 = w$ mit $|w| < j$. Die Anzahl der a stimmt also nicht mehr mit der Anzahl der b überein.
- $vwx = a^k b^j$:
  - Falls $v = a^{k'}$, $x = b^{j'}$: Für $i = 0$ stimmt die Anzahl der a oder die Anzahl der b nicht mehr mit der Anzahl der c überein.
  - Falls v ein Gemisch aus a und b enthält: Für $i \geq 2$ würde eine Folge a^n durch eine b-Folge unterbrochen.
  - Falls x ein Gemisch aus a und b enthält: Für $i \geq 2$ würde eine Folge a^n durch eine b-Folge unterbrochen.
- $vwx = b^j$: analog zu Fall a^j
- $vwx = b^k c^j$: analog zu Fall $a^k b^j$
- $vwx = c^j$: analog zu Fall a^j

In jeder der Möglichkeiten lässt sich also durch „Pumpen“ ein Wort $w \notin L$ finden. Daher kann L nicht kontextfrei sein. □

Lemma 5.4: Die Menge der kontextfreien Sprachen ($\mathcal{M}_2$) ist eine echte Teilmenge der Menge der kontextsensitiven Sprachen ($\mathcal{M}_1$).

BEWEIS: Aus Beobachtung 3.1 wissen wir bereits, dass $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$ gilt. Aus Bsp. 3.3 wissen wir, dass $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt wird. Mit Hilfe von Lemma 5.3 folgern wir $\mathcal{M}_2 \subsetneq \mathcal{M}_1$. □

5.2 Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen

Satz 5.5: Die Menge der kontextfreien Sprachen (CFL) ist abgeschlossen unter Vereinigung ($\cup$), Konkatenation ($\cdot$) und dem Sternoperator (*).

BEWEIS: Für zwei CFG $\mathcal{G}_i = (\Sigma, N_i, P_i, S_i), i = 1, 2$, konstruiere $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$\begin{aligned}
\text{„}\cup\text{“} : N &= N_1 \dot\cup N_2 \dot\cup \{S\} \\
P &= \{S \to S_1, S \to S_2\} \cup P_1 \cup P_2 \\
\text{„}\cdot\text{“} : N &= N_1 \dot\cup N_2 \dot\cup \{S\} \\
P &= \{S \to S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2 \\
\text{„}^*\text{“} : N &= N_1 \dot\cup \{S\} \\
P &= \{S \to \varepsilon, S \to S_1 S\} \dot\cup P_1
\end{aligned}$$

□

Satz 5.6: Die CFL sind *nicht* unter Schnitt ($\cap$) abgeschlossen.

BEWEIS: für $n \geq 1$

$$\underbrace{\{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}}_{\in \text{CFL}} \cap \underbrace{\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}}_{\in \text{CFL}} = \underbrace{\{a^n b^n c^n\}}_{\notin \text{CFL}}$$

Also CFL nicht abgeschlossen unter $\cap$. (siehe Lemma 5.3) □

Satz 5.7: Die CFL sind *nicht* unter Komplement ($\overline{\cdot}$) abgeschlossen.

BEWEIS: Angenommen, CFL wäre abgeschlossen unter $\overline{\cdot}$.
Falls $L_1, L_2 \in$ CFL, dann ist $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in$ CFL nach Annahme.
$\Rightarrow \overline{L}_1 \cup \overline{L}_2 \in$ CFL wegen Abschluss unter „$\cup$“.
$\Rightarrow \overline{\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2} = L_1 \cap L_2 \in$ CFL – Widerspruch zu Nicht-Abschluss unter „$\cap$“. □

5.3 Deterministisch kontextfreie Sprachen

Def. 5.1: Wir definieren einen *Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen* als 7-Tupel

$$\mathcal{E} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta, F)$$

mit den Komponenten $\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta$ wie für einen gewöhnlichen Kellerautomaten und $F \subseteq Q$ als die Menge der akzeptierenden Zustände.

Weiterhin definieren wir das Akzeptanzverhalten folgendermaßen:
Eine Konfiguration (q, w, γ) eines Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen ist *akzeptierend*, falls $q \in F$ und $w = \varepsilon$. Die von einem Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}$ *akzeptierte Sprache* ist

$$L(\mathcal{E}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \gamma \in \Gamma^* : (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \rhd^* (q, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Hierbei ist $\rhd$ die Schrittrelation genau wie für gewöhnliche Kellerautomaten. ◇

Lemma 5.8: Zu jedem (gewöhnlichen) Kellerautomaten gibt es einen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen, der die gleiche Sprache akzeptiert. Gleiches gilt in die andere Richtung.

Beweis: Siehe Übungsblatt 7 Aufgabe 5. □

Def. 5.2: Ein deterministischer Kellerautomat (DPDA) ist ein 7-Tupel

$$\mathcal{D} = (\underbrace{\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}}_{\text{wie gehabt}}, \delta, F)$$

- $F \subseteq Q$ akzeptierende Zustände
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ wobei für alle $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$ gelten muss, dass $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$
- Die Schrittrelation „$\rhd$“ ist definiert wie bei NPDAs.
- $L(\mathcal{D}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \rhd^* (q', \varepsilon, \gamma) \wedge q' \in F\}$ ◇

Lemma 5.9: Zu jedem DPDA $\mathcal{D}$ gibt es einen äquivalenten DPDA $\mathcal{D}_e$, der jede Eingabe bis zum Ende liest.

Beweis: Sei $\mathcal{D} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta, F)$. Es gibt zwei Möglichkeiten, warum $\mathcal{D}$ nicht die gesamte Eingabe verarbeitet: Die Transitionsrelation ist nicht total oder der Automat bleibt bei leerem Keller stecken.

Abhilfe: Führe einen Senkzustand ein, auf dem $\mathcal{D}_S$ weiterrechnet, wenn $\mathcal{D}$ nicht mehr weiterrechnen kann. Definiere dazu $\mathcal{D}_S = (\Sigma, Q_S, \Gamma_S, q_S^{\text{init}}, Z_S^{\text{init}}, \delta_S, F_S)$ mit

$Q_S = Q \cup \{q_S^{\text{init}}, q_s\}$ mit neuen Zuständen: q_S^{init} neuer Startzustand und q_s Senkzustand
$F_S = F$
$\Gamma_S = \Gamma \cup \{Z_S^{\text{init}}\}$ neues Kellerbodensymbol

und Transitionsfunktion δ_S gegeben durch

$$\delta_S(q_S^{\text{init}}, \varepsilon, Z_S^{\text{init}}) = \{(q^{\text{init}}, Z^{\text{init}} Z_S^{\text{init}})\}$$

- Transitionsfunktion totalisieren: Für alle $q \in Q$, $Z \in \Gamma$

$$\delta_S(q, \varepsilon, Z) = \begin{cases} \delta(q, \varepsilon, Z) & \text{falls } \delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \vee \exists a \in \Sigma, \delta(q, a, Z) \neq \emptyset \\ \{(q_s, Z)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_S(q, a, Z) = \begin{cases} \delta(q, a, Z) & \text{falls } \delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \vee \delta(q, a, Z) \neq \emptyset \\ \{(q_s, Z)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

  Intuition: Wenn $\delta(q, a, Z) = \emptyset$ und es keinen ϵ-Übergang gibt, kann das Wort von $\mathcal{D}$ nicht weiter abgearbeitet werden. $\mathcal{D}_S$ geht nun in Senkzustand q_s und arbeitet dort weiter. Analog für $\delta(q, \epsilon, Z)$.

- Kellerunterlauf vermeiden: $\mathcal{D}$ hat Z^{init} abgeräumt, so dass Z_S^{init} sichtbar geworden ist. Füge eine ϵ-Transition in Senkzustand q_s hinzu, indem man für alle $q \in Q$ definiert:

$$\delta_S(q, \varepsilon, Z_S^{\mathsf{init}}) = \{(q_s, Z_S^{\mathsf{init}})\}$$

  In q_s kann $\mathcal{D}_S$ nun das Restwort für alle $a \in \Sigma$, $Z \in \Gamma_S$ abarbeiten:

$$\delta_S(q_s, a, Z) = \{(q_s, Z)\}$$

  Bemerkung: $q_s \notin F_S$, da ein Kellerunterlauf das Akzeptieren des eingelesen Worts ausschließt.

Es verbleibt zu zeigen:

- $\forall w \in \Sigma^* \; \exists q \in Q_S, \gamma \in \Gamma_S^* : (q_S^{\mathsf{init}}, w, Z_S^{\mathsf{init}}) \rhd^* (q, \varepsilon, \gamma)$.

  (Induktion über die Länge von w)

- $L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{D}_S)$. □

Satz 5.10: Die deterministischen CFL sind unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Sei L deterministisch kontextfrei. Nach Lemma 5.9 gibt es einen DPDA $\mathcal{D}$ mit $L(\mathcal{D}) = L$, der die komplette Eingabe liest.

Konstruiere einen DPDA $\mathcal{D}_K$, sodass $L(\mathcal{D}_K) = \overline{L}$. Definiere dazu $Q_K = Q \times \{0, 1, 2\}$. Bedeutung des zusätzlichen „Flags“ in $\{0, 1, 2\}$:

- 0: seit dem Lesen des letzten Symbols $a \in \Sigma$ wurde kein akzeptierender Zustand durchlaufen
- 1: seit dem Lesen des letzten Symbols $a \in \Sigma$ wurde mindestens ein akzeptierender Zustand durchlaufen
- 2: markiert einen akzeptierenden Zustand in $\mathcal{D}_K$

$F_K = Q \times \{2\}$

Definiere Hilfsfunktion $acc : Q \to \{0, 1\}$ durch

$$acc(q) = \begin{cases} 0 & q \notin F \\ 1 & q \in F \end{cases}$$

$$q_K^{\mathsf{init}} = (q^{\mathsf{init}}, acc(q^{\mathsf{init}}))$$

Wir definieren δ' für alle $q \in Q$, $Z \in \Gamma$ folgendermaßen.

Falls $\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(q', \gamma)\}$, dann

$$\delta'((q, 0), \varepsilon, Z) = ((q', acc(q')), \gamma)$$
$$\delta'((q, 1), \varepsilon, Z) = ((q', 1), \gamma)$$

Falls $\delta(q, a, Z) = \{(q', \gamma)\}$, dann

$$\delta'((q, 0), \varepsilon, Z) = \{((q, 2), Z)\}$$
$$\delta'((q, 2), a, Z) = ((q', acc(q')), \gamma)$$
$$\delta'((q, 1), a, Z) = ((q', acc(q')), \gamma)$$

□

Satz 5.11: Die deterministisch kontextfreien Sprachen sind eine echte Teilmenge der kontextfreien Sprachen.

Beweis: Offensichtlich gibt es eine Teilmengenbeziehung, denn die von nichtdeterministischen Kellerautomaten mit akzeptierendem Zustand akzeptierten Sprachen sind gerade die kontextfreien Sprachen und jeder deterministische Kellerautomat ist ein spezieller nichtdeterminischer Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen. Die deterministisch kontextfreien Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen, die kontextfreien Sprachen sind es nicht. Die beiden Mengen von Sprachen können also nicht gleich sein. □

6 Turingmaschinen

Vorlesung: 20.12.17

TODO ganz kurze Einführung

- Weiteres Maschinenmodell
- Maximale Eskalation alles was berechnet werden kann
- zahlen dafür hohen Preis: Nicht-triviale Endlosschleifen
- werden sehen: Entspricht Typ-0 Grammatiken

6.1 **Turingmaschine** (informell)

Die Turingmaschine (TM) ist eine Erweiterung des endlichen Automaten mit den folgenden Zusätzen.

- Die Eingabe steht auf einem Band, das rechts und links der Eingabe unendlich viele Zellen hat.

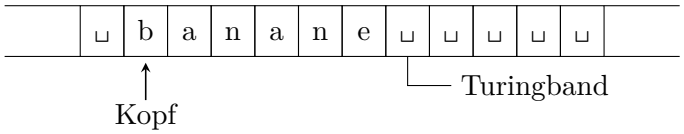


Abb. 8: Turingband

- Der Kopf der TM kann nicht nur Zeichen lesen, sondern auch Zeichen schreiben. Der Kopf steht wie bei endlichen Automaten immer auf genau einer Zelle und liest in jedem Rechenschritt das Zeichen, welches auf dieser Zelle geschrieben steht. Im Gegensatz zu endlichen Automaten kann der Kopf aber auch Zeichen schreiben; er tut dies in jedem Rechenschritt. Dabei wird das aktuelle Zeichen der Zelle durch ein neues Zeichen ersetzt. Neues und altes Zeichen dürfen aber auch identisch sein.
- Wir haben nicht nur ein Eingabealphabet Σ, sondern auch ein Bandalphabet Γ. Jede Zelle des Bands ist mit einem Zeichen des Bandalphabets beschriftet. Wir haben in unserem Bandalphabet ein spezielles Zeichen $\sqcup \in \Gamma$, das wir *Blank* nennen und welches ein Feld als „leer“ markiert. Zu Beginn sind alle Zellen, auf denen keine Eingabe steht, mit einem Blank-Zeichen beschriftet.
- Der Kopf der TM kann nicht nur nach rechts bewegt werden, er darf auch nach links bewegt werden oder seine Position beibehalten.

Wie bei endlichen Automaten steht der Kopf zu Beginn auf dem ersten (am weitesten links stehenden) Zeichen der Eingabe.

Wir geben die Transitionsfunktion einer Turingmaschine mit Hilfe einer Tabelle, der sogenannten *Turingtabelle* an.

q	a	q'	a'	d

Die Bedeutung eines Tabelleneintrags ist dabei: Wenn die TM in Zustand q ist und der Kopf liest gerade das Symbol $a \in \Gamma$, dann wechsle in den Zustand q', schreibe a' (über altes a) und bewege den Kopf gemäß $d \in \{R, L, N\}$.

Eine Turingmaschine arbeitet schrittweise. In jedem Rechenschritt wird eine Zeile der Turingtabelle angewendet. Bei nichtdeterministischen Turingmaschinen kann es Situationen geben, bei denen mehrere Zeilen der Turingtabelle angewendet werden können, bei deterministischen Turingmaschinen kann immer höchstes ein Tabelleneintrag angewendet werden. In beiden Fällen (deterministisch/nichtdeterministisch) darf es auch den Fall geben, dass *keine* Zeile angewendet werden kann. In solch einem Fall hält die Turingmaschine an. Nachdem die Turingmaschine angehalten hat, prüfen wir, ob der aktuelle Zustand ein akzeptierender Zustand ist. Falls ja, wird die Eingabe akzeptiert, falls nein, wird die Eingabe verworfen.

Wurde eine Eingabe nicht akzeptiert, kann dies also zwei Ursachen haben:

1. Die Turingmaschine war nach dem Anhalten nicht in einem akzeptierenden Zustand.
2. Die Turingmaschine hat niemals angehalten.

Wir werden deterministische Turingmaschinen nicht nur verwenden, um *Sprachen* zu definieren (Akzeptanz), sondern auch um (*partielle*) *Funktionen* vom Typ $\Sigma^* \to \Sigma^*$ zu definieren. Das Funktionsargument ist dabei das Wort, welches zu Beginn auf dem Band steht. Das Resultat ist das Wort, welches am Ende auf dem Band steht (ohne den Teil links des Kopfs); um sicherzustellen, dass das Resultat ein Element von Σ^* ist, projizieren wir den Inhalt jeder Zelle nach dem Halten auf Σ.

Da die TM in endlich vielen Schritten nur endlich viele Zeichen schreiben kann, ist klar, dass das Resultat nach dem Halten ein endliches Wort ist. Hält die TM nicht, ist der Funktionswert für die entsprechende Eingabe undefiniert (daher beschreiben Turingmaschinen im Allgemeinen nur *partielle* Funktionen).

Bsp.: Aufgabe: Verschiebe das erste Zeichen ans Ende der Eingabe.
Dafür benutzen wir für jedes Symbol x im Eingabealphabet einen eigenen Zustand q_x.

			␣						b			
	␣	␣	b	a	n	a	n	e	a	␣	␣	

q_0	x	q_x	$\sqcup$	R	$x \neq \sqcup$
q_x	$\sqcup$	q_3	x	L	
q_x	y	q_x	y	R	$y \neq \sqcup$
q_3	y	q_3	y	L	$y \neq \sqcup$
q_3	$\sqcup$	q_4	$\sqcup$	R	

Sie finden zwei weitere Beispiele für Turingmaschinen in den Folien, die auf der Vorlesungswebseite verlinkt sind.

https://swt.informatik.uni-freiburg.de/teaching/WS2017-18/info3

6.2 Formalisierung der TM

Def. 6.1: Eine TM ist ein 7-Tupel

$$\mathcal{M} = \left(\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F\right)$$

mit den folgenden Komponenten:

- Σ ist ein Alphabet, das wir *Eingabealphabet* nennen,
- Q ist eine endliche Menge, deren Elemente wir *Zustände* nennen,
- $\Gamma \supsetneq \Sigma$ ist eine Menge, die wir *Bandalphabet* nennen,
- $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{R, L, N\})$ ist eine Funktion, die wir *Transitionsfunktion* nennen,
- $q^{\mathsf{init}} \in Q$ ein Zustand, den wir *Startzustand* nennen,
- $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist ein Zeichen, das wir *Blank* nennen und
- $F \subseteq Q$ ist eine Teilmenge der Zustände, deren Elemente wir *akzeptierende* Zustände nennen.

Die TM $\mathcal{M}$ heißt *deterministisch* (DTM), falls $\forall q \in Q, \forall a \in \Gamma, |\delta(q, a)| \leq 1$. Ansonsten ist $\mathcal{M}$ *nichtdeterministisch* (NTM). ◇

Im Folgenden sei $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F)$ eine TM.

Die *Konfiguration* einer Turingmaschine wird durch drei Dinge beschrieben:

1. Der aktuelle Zustand

2. Der Bandinhalt
3. Die Position des Kopfs

Die scheinbar „natürlichste“ Beschreibung der Konfiguration wäre also ein Tripel aus $Q \times (\mathbb{Z} \to \Gamma) \times \mathbb{Z}$. Dies würde aber erfordern, dass wir jede Zelle des Bands mit einer ganzen Zahl identifizieren und wir müssten uns eine endliche Repräsentation für die Abbildung $\mathbb{Z} \to \Gamma$ überlegen. Wir verwenden stattdessen den folgenden „Trick“ und beschreiben eine Konfiguration durch ein Tripel (v, q, w). Dabei beschreibt

- v ein endliches Suffix der Bandhälfte links des Kopfs, das alle nicht-Blank-Zeichen (dieser Hälfte) enthält,
- q den aktuellen Zustand und
- w ein endliches Präfix der verbleibenden Bandhälfte (also unter Kopf und rechts davon), das alle nicht-Blank-Zeichen (dieser Hälfte) enthält.

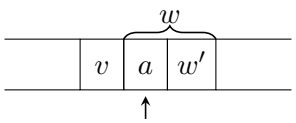


Abb. 9: Informelle graphische Darstellung einer Turingmaschinenkonfiguration

Def. 6.2: Die Menge der Konfigurationen einer TM ist $\mathrm{Konf}(\mathcal{M}) = \Gamma^* \times Q \times \Gamma^+$. Die *Startkonfiguration* bei Eingabe w ist $(\varepsilon, q^{\mathsf{init}}, w)$ für $w \neq \varepsilon$ und $(\varepsilon, q^{\mathsf{init}}, \sqcup)$ für $w = \varepsilon$. Eine *Haltekonfiguration* ist eine Konfiguration (v, q, aw), bei der $\delta(q, a) = \emptyset$ gilt. $\diamond$

Notation: Wenn aus dem Kontext klar wird, welcher Buchstabe zu welche Komponente des Tripels gehört, dürfen wir die Klammern und Kommata auch weglassen. Wir schreiben z.B. die Startkonfiguration als $q^{\mathsf{init}}w$.

Def. 6.3: Die *Rechenschrittrelation*

$$\vdash \subseteq \mathrm{Konf}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Konf}(\mathcal{M})$$

ist definiert durch:[25]

$$
\begin{array}{lrll}
1. & vqaw & \vdash vq'a'w & \text{falls } \delta(q,a) = (q', a', N) \\
2. & vqaw & \vdash va'q'w & \text{falls } \delta(q,a) = (q', a', R), w \neq \varepsilon \\
 & va'q'\sqcup & & \text{———— " ————}, w = \varepsilon \\
3. & qaw & \vdash q'\sqcup a'w & \delta(q,a) = (q', a', L) \\
 & vbqaw & \vdash vq'ba'w & \text{——— " ——— } b \in \Gamma
\end{array}
\quad \diamond
$$

Analog zu den vorigen Kapiteln schreiben wir $\vdash^* \subseteq \text{Konf}(\mathcal{M}) \times \text{Konf}(\mathcal{M})$ für die reflexive transitive Hülle von $\vdash$.

- Das Symbol $\vdash$ steht also für eine Relation über $\text{Konf}(\mathcal{M})$, die einzelne Berechnungsschritte beschreibt.
- Der Ausdruck $\vdash^*$ steht für eine Relation über $\text{Konf}(\mathcal{M})$, die eine endliche Sequenz von Berechnungsschritten beschreibt.

Def. 6.4 (Von TM akzeptierte Sprache)**:** Wir sagen $\mathcal{M}$ *akzeptiert* $w \in \Sigma^*$, wenn die folgenden drei Eigenschaften gelten.

1. $q^{\mathsf{init}}w \vdash^* uqv$
2. uqv Haltekonfiguration
3. $q \in F$

Die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{M} \text{ akzeptiert } w\}. \quad \diamond$$

Def. 6.5: Eine DTM $\mathcal{M}$ *hält* auf einer Eingabe w, falls es eine Haltekonfiguration uqv gibt, sodass $q^{\mathsf{init}}w \vdash^* uqv$ gilt. $\diamond$

Falls eine DTM $\mathcal{M}$ ein Wort w nicht akzeptiert, kann dies zwei Ursachen haben:

1. $\mathcal{M}$ hält nicht auf w.
2. Der Zustand der Haltekonfiguration von $\mathcal{M}$ auf w ist nicht akzeptierend.

[25] Die beiden Spezialfälle, dass q „ganz rechts“ oder „ganz links“ steht, wurde in der Vorlesung am 20.12.2017 vergessen. Die Definition wurde am 10.1.2018 nochmal kurz besprochen.

Def. 6.6 (Die von einer DTM $\mathcal{M}$ berechnete Funktion)**:** Sei $\mathcal{M}$ eine DTM. Dann ist die von $\mathcal{M}$ *berechnete partielle*[26] *Funktion* $f_{\mathcal{M}} : \Sigma^* \nrightarrow \Sigma^*$ wie folgt definiert.

$$f_{\mathcal{M}}(w) = \begin{cases} & & & q^{\mathsf{init}}w \vdash^* uqv' \\ v & \text{falls } \exists (u,q,v') \in \mathrm{Konf}(\mathcal{M}) \text{ sodass} & \text{und} & uqv' \text{ ist Haltekonfiguration} \\ & & \text{und} & v = \mathrm{out}(v') \\ \mathit{undef}. & \text{sonst} & & \end{cases}$$

Dabei ist out die Funktion, die ein Wort auf das Eingabealphabet Σ projiziert. Wir definieren $\mathrm{out} : \Gamma^* \to \Sigma^*$ formal wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathrm{out}(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \mathrm{out}(au) &= a \cdot \mathrm{out}(u) \quad a \in \Sigma \\ \mathrm{out}(bu) &= \mathrm{out}(u) \quad b \in \Gamma \setminus \Sigma \end{aligned}$$ ◇

Beobachtung: Die Funktion $f_{\mathcal{M}}(w)$ ist genau für die Wörter definiert, für die $\mathcal{M}$ angesetzt auf w hält.

6.3 TM-Programmierung mit Hilfe von Flussdiagrammen

Vorlesung: 10.01.2018

Auch für einfache Turingmaschinen können die Turingtabellen sehr groß werden. Wir führen deshalb einen Formalismus ein, der es uns erlaubt, mehrere kleine Turingmaschinen zu einer großen zusammenzubauen.

Idee: Wir nehmen einen gerichteten Graphen und beschriften dessen Knoten mit Turingmaschinen und dessen Kanten mit einer Teilmenge des Bandalphabets. Eine Kante $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\{a,b,c\}} \mathcal{M}_2$ bedeutet dann: Wenn die TM $\mathcal{M}_1$ hält und a, b oder c unter dem Kopf steht, dann kann TM $\mathcal{M}_2$ beginnend mit ihren Startzustand auf dem aktuellen Bandinhalt weitermachen. Voraussetzung ist, dass alle TMs das gleiche Bandalphabet und das gleiche Blanksymbol verwenden.

Bsp. 6.1: Wir definieren uns zunächst für beliebiges Σ und Γ drei sehr einfache Turingmaschinen.

- 1-Schritt-Rechtsmaschine $\mathcal{M}_r$:

  Geht für beliebigen Bandinhalt einen Schritt nach rechts und hält dann.

  $$\mathcal{M}_r = (\Sigma, \{q_0, q_1\}, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, \{\}) \text{ mit } \delta(q,x) = \begin{cases} \{(q_1, x, R)\} & \text{falls } q = q_0 \\ \{\} & \text{falls } q = q_1 \end{cases}$$

[26] Im Gegensatz zu einer Funktion muss eine partielle Funktion nicht für alle Elemente des Urbilds definiert sein. Ist f keine Funktion, sondern nur eine partielle Funktion von X nach Y, so schreiben wir $f : X \nrightarrow Y$ statt $f : X \to Y$.

- 1-Schritt-Linksmaschine $\mathcal{M}_l$:

  Geht für beliebigen Bandinhalt einen Schritt nach links und hält dann.

  $$\mathcal{M}_l = (\Sigma, \{q_0, q_1\}, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, \{\}) \text{ mit } \delta(q,x) = \begin{cases} \{(q_1, x, L)\} & \text{falls } q = q_0 \\ \{\} & \text{falls } q = q_1 \end{cases}$$

- Für jedes Zeichen $y \in \Gamma$ die Druckmaschine $\mathcal{D}_y$:

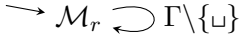
  Schreibt das Zeichen y in die Zelle, über der sich der Kopf befindet, und hält dann.

  $$\mathcal{D}_y = (\Sigma, \{q_0, q_1\}, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, \{\}) \text{ mit } \delta(q,x) = \begin{cases} \{(q_1, y, N)\} & \text{falls } q = q_0 \\ \{\} & \text{falls } q = q_1 \end{cases}$$

Bsp. 6.2: Mit Hilfe von Flussdiagrammen definieren wir uns nun zwei weitere Turingmaschinen.

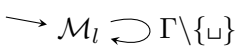
- Rechtsmaschine $\mathcal{M}_R$:

  Geht für beliebigen Bandinhalt nach rechts, bis ein Blanksymbol erreicht ist, und hält dann. Es wird mindestens ein Schritt gemacht.

- Linksmaschine $\mathcal{M}_L$:

  Geht für beliebigen Bandinhalt nach links, bis ein Blanksymbol erreicht ist, und hält dann. Es wird mindestens ein Schritt gemacht.

Wir definieren das Flussdiagramm nun formal wie folgt.

Vorlesung: 12.01.2018

Def. 6.7: Ein *Flussdiagramm* ist ein 7-Tupel $G = (\Sigma, \Gamma, \sqcup, V, E, v^{\mathsf{init}}, L_V, L_E)$. Dabei ist

- Σ ein Alphabet, das wir *Eingabealphabet* nennen,
- $\Gamma \supsetneq \Sigma$ ein Alphabet, das wir *gemeinsames Bandalphabet* nennen,
- $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ ein Zeichen, das wir *gemeinsames Blanksymbol* nennen,
- (V, E) ein gerichteter Graph,
- $v^{\mathsf{init}} \in V$ ein Knoten, den wir *Startknoten* nennen,
- L_V eine Abbildung, die jedem Knoten $v \in V$ eine Turingmaschine zuordnet und
- $L_E : E \to \mathcal{P}(\Gamma)$ eine Abbildung, die jeder Kante $(v, v') \in E$ eine Teilmenge des Bandalphabets zuordnet. $\diamond$

Notation: Bis zum Ende des Kapitels schreiben wir $\mathcal{M}_v = (\Sigma, Q_v, \Gamma, \delta_v, q_v^{\mathsf{init}}, \sqcup, F_v)$ für die Turingmaschine $L_V(v)$, also die Turingmaschine, die dem Knoten v zugeordnet ist.

Def. 6.8: Die von einem Flussdiagramm $G = (\Sigma, \Gamma, \sqcup, V, E, v^{\mathsf{init}}, L_V, L_E)$ definierte Turingmaschine ist $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F)$, wobei

- $Q = \dot{\bigcup\limits_{v \in V}} Q_v$ [27]
- $q^{\mathsf{init}} = q_{v^{\mathsf{init}}}^{\mathsf{init}}$
- $\delta(q,x) = \begin{cases} \delta_v(q,x) & \text{falls } q \in Q_v \text{ und } \delta_v(q,x) \neq \emptyset \\ \left\{ (q'', x, N) \,\middle|\, \begin{array}{l} q \in Q_v, (v,v') \in E, \\ x \in L_E((v,v')), q'' = q_{v'}^{\mathsf{init}} \end{array} \right\} & \text{sonst} \end{cases}$
- $F = \dot{\bigcup\limits_{v \in V}} F_v$. ◇

Konvention: Analog zu Startzuständen von endlichen Automaten verwenden wir einen eingehenden Pfeil, um den Startknoten eines Flussdiagramms zu kennzeichnen.

Bsp. 6.3: Wir wollen eine TM konstruieren, welche die wie folgt definierte Subtraktion von natürlichen Zahlen implementiert.

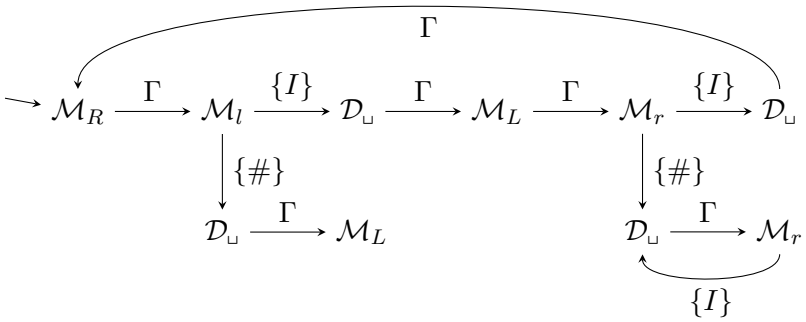
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{falls } x \geq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir verwenden dabei eine auf Strichsymbolen basierende Unärcodierung für die Operanden und nehmen an, dass das Zeichen # verwendet wird, um die Operanden x und y in der Eingabe zu trennen. Wir haben also $\Sigma = \{I, \#\}$ und für Minuend x und Subtrahend y hat die Eingabe hat die folgende Form.

$$\underbrace{I \ldots I}_{x \text{ Mal}} \# \underbrace{I \ldots I}_{y \text{ Mal}}$$

Idee: Lösche für jeden y-Strich einen x-Strich. Lösche falls nötig (Fall $y > x$) verbleibende y-Striche. Lösche anschließend das Trennzeichen #. Wir verwenden die übliche Notation für das Blanksymbol, benötigen keine weiteren Zeichen für unsere Berechnung und verwenden daher das Bandalphabet $\Gamma := \Sigma \cup \{\sqcup\}$.

[27] Um eine disjunkte Vereinigung zu erreichen, müssen wir ggf. Zustände umbenennen.



Die obere Schleife beschreibt das simultane Entfernen von Strichen in x und y. Die erste Abzweigung nach unten wird genommen, wenn alle Striche von y entfernt wurden – also ursprünglich y kleiner ($\leq$) als x war. Die untere Schleife wird ausgeführt, wenn y echt größer als x war; sie dient dazu, die verbleibenden Zeichen auf dem Band zu löschen, um die unärcodierte 0 (also das leere Wort) zu erzeugen.

6.4 Varianten von TMs

Es gibt sehr viele Varianten von Turingmaschinen. Diese sind äquivalent zu Def. 6.1 in dem Sinne, dass sie nicht mehr Sprachen akzeptieren oder mehr Funktionen berechnen können. Je nach Anwendung können diese Varianten aber bequemer sein. Wir stellen in diesem Abschnitt zwei solche Varianten vor.

6.4.1 Mehrspurmaschinen

Eine k-Spur-Turingmaschine arbeitet wie eine (gewöhnliche) TM, aber das Band hat hier k Spuren. Der Kopf liest und schreibt also immer einen k-Vektor von Zeichen. Die Transitionsfunktion hat den Typ $\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{R, L, N\})$.

Die Eingabe steht zu Beginn auf der ersten Spur. Zum Ermitteln der Ausgabe betrachten wir auch nur die erste Spur.

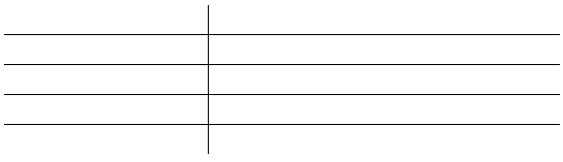


Abb. 10: Mehrspurmaschine

Bsp.: binäre Addition und Multiplikation nach der Schulmethode

Bemerkung: Eine k-Spur-TM kann von einer (gewöhnlichen) TM simuliert werden.

Idee: Verwende Bandalphabet $\Gamma_{\mathsf{sim}} = \Sigma \dot{\cup} (\Gamma^k \times \{\sqcup, B, A\})$ und Blanksymbol $\sqcup_{\mathsf{sim}} = \sqcup^{k+1}$. Hierbei steht B für „besucht“ und A für „Ausgabe“.

1. Konvertieren der Eingabe:

   Laufe einmal über die Eingabe und ersetze $a \in \Sigma$ durch $\begin{pmatrix} a \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \in \Gamma_{\mathsf{sim}}$. Bewege den Kopf zurück in die Ausgangsposition (also die am weitesten links liegende Zelle, die verschieden von $\sqcup_{\mathsf{sim}}$ ist).

2. Simulation:

   Exaktes Nachahmen jedes Rechenschritts der k-Spur-TM, bis diese anhält. Schreibe dabei als $k+1$-te Komponente des Tupels immer ein B.

3. Konvertieren der Ausgabe:

   Idee: Ersetze jedes $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_{\mathsf{sim}}$ durch a_1, falls $a_1 \in \Sigma$, und sonst durch $\begin{pmatrix} \sqcup \\ \sqcup \\ \vdots \\ A \end{pmatrix}$.

   (Zur Ausgabe gehören schließlich nur die Elemente aus Σ.)

   - Problem 1: Woher wissen wir, wie weit wir nach rechts laufen müssen?

     Lösung: Wir achten auf die letzte Komponente des Tupels. Wir laufen so lange nach rechts, wie dort ein B steht, denn alle diese Zellen haben wir mindestens einmal besucht.

   - Problem 2: Alles was links des Kopfs steht, gehört nicht zur Ausgabe. Wie bekommen wir den Kopf wieder an die Stelle, wo er vor dem Konvertieren der Ausgabe war?

     Lösung: Wir laufen so lange nach links, bis das erste Zeichen kommt, das nicht aus Σ ist und dessen letzte Komponente kein A ist.

6.4.2 Mehrbandmaschinen

Eine k-Band-TM hat k Bänder, die jeweils einen eigenen Kopf haben. In jedem Schritt wird jeder Kopf lesen, schreiben und sich bewegen. Dabei darf sich jeder Kopf in eine andere Richtung bewegen.

Die Transitionsfunktion hat den Typ $\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{R, L, N\}^k)$.

Bemerkung: Eine k-Band-TM $\mathcal{M}$ kann von einer $2k+1$-Spur-TM $\mathcal{M}_{\mathsf{sim}}$ simuliert werden.

Idee: Codiere die Konfiguration einer k-Band-TM mit Hilfe von $2k$ Spuren. Simuliere einen Schritt der k-Band-TM in mehreren Schritten. Verwende dabei eine zusätzliche Spur, um das bisher bearbeitete Band zu kennzeichnen. Der Zustand von $\mathcal{M}$ wird im Zustand von $\mathcal{M}_{\mathsf{sim}}$ codiert.

Das Bandalphabet der k-Spur-TM sei dabei $\Gamma_{\mathsf{sim}} = \Gamma \dot{\cup} \{\#, B\}$.

- Spur $2i-1$ simuliert Band i.
- Spur $2i$ ist leer bis auf einen Marker $\#$, welcher die Position des Kopfs auf Band i markiert.
- Spur $2k+1$ enthält das Zeichen B an jeder Position, die bereits bearbeitet wurde.

Spur	
1	——————— Band 1 ———————
2	# Kopf für Band 1
3	——————— Band 2 ———————
4	# Kopf 2
	⋮
$2k-1$	——————— Band k ———————
$2k$	# Kopf k
$2k+1$	… ␣ ␣ B B B B … B B B B ␣ ␣ …
	↑ linker Rand ↑ rechter Rand

Vorlesung: 17.01.2018

1. Herstellen der Start-Konfiguration:

   - Schreibe Kopfmarkierung (Zeichen $\#$) auf allen geraden Spuren und B auf Spur $2k+1$.

Spur 1	$a_1 a_2 \dots a_n$ (= Eingabe)
2	#
3	␣
4	#
⋮	
$2k-1$	␣
$2k$	#
$2k+1$	␣B␣

2. Simulation:

   Der Kopf der Mehrspurmaschine startet jeweils bei der linken Begrenzung, also beim am weitesten links stehenden B auf Spur $2k+1$.

- Laufe bis zum rechten Rand. Sammle dabei die Symbole unter den Köpfen (markiert mit #) und merke dir diese im Zustand (Vektorcodierung $\overrightarrow{\gamma} \in \Gamma^k$).
- Bestimme Resultat von Transitionsfunktion $\delta(q, \overrightarrow{\gamma}) = (q', \overrightarrow{\gamma'}, \overrightarrow{d})$
  neuer Zustand q', für jeden Kopf ein neues Symbol $\overrightarrow{\gamma'}$ und Richtung $\overrightarrow{d}$.
- Laufe zurück nach links. Schreibe dabei das jeweilige Zeichen $\overrightarrow{\gamma}'$ am entsprechenden Kopf und versetze diesen gemäß $\overrightarrow{d}$.

Falls eine Kopfbewegung den Rand auf Spur $2k + 1$ überschreitet, dann schreibe ein weiteres B.

Beim Rücklauf: Teste auf Haltekonfiguration der k-Band-TM. Falls ja, so springe in eine Haltekonfiguration der k-Spur-TM.

Bemerkung: Angenommen, für ein Wort der Länge n benötige die k-Band-TM $\mathcal{M}$ $T(n)$ Schritte und $S(n)$ Zellen auf den Bändern. Dann benötigt $\mathcal{M}_{\mathsf{sim}}$ höchstens $O(S(n))$ Zellen und $O(S(n) \cdot T(n)) = O(T(n)^2)$ Schritte.

6.5 Universelle Turingmaschine

Die bisher betrachteten Turingmaschinen waren (ebenso wie endliche Automaten oder Kellerautomaten) auf einen Einsatzzweck beschränkt und konnten nur eine bestimmte Sprache akzeptieren oder eine bestimmte Funktion berechnen. Dies entspricht nicht unserer Vorstellung eines Computers, denn dieser kann normalerweise beliebige Programme ausführen.

In diesem Kapitel konstruieren wir nun eine TM $\mathcal{M}_U$, die als Eingabe sowohl eine Codierung $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$ einer beliebigen TM $\mathcal{M}$ als auch deren Eingabe w nimmt, sodass die folgenden drei Eigenschaften gelten.

$$w \in L(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w \in L(\mathcal{M}_U) \tag{5}$$

$$\mathcal{M} \text{ hält auf Eingabe } w \Leftrightarrow \mathcal{M}_U \text{ hält auf Eingabe } \ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w \tag{6}$$

$$f_{\mathcal{M}}(w) = f_{\mathcal{M}_U}(\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w) \tag{7}$$

Wir nennen $\mathcal{M}_U$ die *universelle Turingmaschine*.

6.5.1 Codierung von Turingmaschinen

Zunächst wollen wir uns eine Codierung $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$ für $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F)$ überlegen. Die Effizienz unserer Codierung ist uns dabei nicht wichtig und wir versuchen der Einfachheit wegen mit Unärcodierungen zu arbeiten.

Einige Vorüberlegungen:

- Da Q und Γ endlich sind, können wir jedem ihrer Elemente eine natürliche Zahl zuordnen.
- Wir müssen q^{init} und $\sqcup$ nicht explizit codieren; wir verwenden die Konvention, dass q^{init} der Zustand mit der Nummer 1 und $\sqcup$ das Zeichen mit der Nummer 1 ist.
- Wir müssen Σ, Q und Γ nicht explizit in die Codierung mit aufnehmen. Für das Ausführen einer TM sind nur die Elemente aus Σ, Q und Γ relevant, die auch in der Transitionsfunktion δ vorkommen.

Idee: Codiere Elemente aus Q und Γ unär mit dem Zeichen 0. Verwende das Zeichen 1, um unärcodierte Zahlen zu trennen.

- Zustände:

  Seien $q_1, \ldots, q_n$ die Elemente von Q, sodass $q_1 = q^{\mathsf{init}}$.

  Definiere $\ulcorner q_i \urcorner := 0^i$.

- Menge der akzeptierenden Zustände:

  Seien $q_{k_1}, \ldots, q_{k_n}$ die Elemente von F.

  Definiere $\ulcorner F \urcorner := \ulcorner q_{k_1} \urcorner 1 \ulcorner q_{k_2} \urcorner 1 \ldots 1 \ulcorner q_{k_n} \urcorner$.

- Bandalphabet:

  Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Elemente von Γ, sodass $a_1 = \sqcup$.

  Definiere $\ulcorner a_j \urcorner := 0^j$.

- Richtung (in die der Schreib-Lesekopf bewegt wird):

  Definiere $\ulcorner L \urcorner := 0$, $\ulcorner N \urcorner := 00$ und $\ulcorner R \urcorner := 000$.

- Transitionsfunktion:

  Seien $(q_{t_1}, a_{t_1}, q'_{t_1}, a'_{t_1}, d_{t_1}), \ldots, (q_{t_n}, a_{t_n}, q'_{t_n}, a'_{t_n}, d_{t_n})$ die Elemente von δ, die nicht auf $\{\}$ abgebildet werden.

  Definiere

  $\ulcorner \delta \urcorner := \ulcorner q_{t_1} \urcorner 1 \ulcorner a_{t_1} \urcorner 1 \ulcorner q'_{t_1} \urcorner 1 \ulcorner a'_{t_1} \urcorner 1 \ulcorner d_{t_1} \urcorner 11 \ldots 11 \ulcorner q_{t_n} \urcorner 1 \ulcorner a_{t_n} \urcorner 1 \ulcorner q'_{t_n} \urcorner 1 \ulcorner a'_{t_n} \urcorner 1 \ulcorner d_{t_n} \urcorner$.

- Turingmaschine:

  $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner := 111 \ulcorner \delta \urcorner 111 \ulcorner F \urcorner 111$

Bsp. 6.4: Wir bestimmen nun die Codierung $\ulcorner \mathcal{M}_r \urcorner$ der 1-Schritt-Rechtsmaschine aus Bsp. 6.1 für $\Sigma = \{0, 1\}$ und $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$. Wir nehmen dabei für die Elemente von Q, Γ und δ die folgenden Reihenfolgen an.

Q	q_0, q_1
Γ	$\sqcup, 0, 1$
δ	$(q_0, \sqcup, q_1, \sqcup, R), (q_0, 0, q_1, 0, R), (q_0, 1, q_1, 1, R)$

Wir erhalten:

- Zustände: $\ulcorner q_0 \urcorner = 0, \ulcorner q_1 \urcorner = 00$
- Menge der akzeptierenden Zustände: $\ulcorner F \urcorner = \varepsilon$ (da $F = \{\}$)
- Bandalphabet: $\ulcorner \sqcup \urcorner = 0$, $\ulcorner 0 \urcorner = 00$, $\ulcorner 1 \urcorner = 000$
- Turingmaschine: $\ulcorner \mathcal{M}_r \urcorner =$

$$111\overbrace{\overbrace{0\,1\,0\,1\,00\,1\,0\,1\,000}^{\text{erste Transition}}11\overbrace{0\,1\,00\,1\,00\,1\,00\,1\,000}^{\text{zweite Transition}}11\overbrace{0\,1\,000\,1\,00\,1\,000\,1\,000}^{\text{dritte Transition}}}^{\ulcorner\delta\urcorner}111\underbrace{\quad}_{\ulcorner F\urcorner}111$$

6.5.2 Arbeitsweise der universellen Turingmaschine

Da die universelle Turingmaschine $\mathcal{M}_U$ recht komplex ist, wollen wir diese hier nicht formal definieren, sondern geben nur eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise an.

Wie definiere $\mathcal{M}_U$ als 3-Band-TM, wobei die Bänder B_1, B_2 und B_3 wie folgt genutzt werden.

B_1 : Zu Beginn steht hier die Eingabe für $\mathcal{M}_U$. Nach der Initialisierung von $\mathcal{M}_U$ verwenden wir B_1, um das Band der Eingabeturingmaschine $\mathcal{M}$ nachzuahmen.

B_2 : Speichere die Codierung der Eingabeturingmaschine $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$.

B_3 : Speichere den aktuellen Zustand von $\mathcal{M}$ (0^k für Zustand q_k).

Die universelle Turingmaschine $\mathcal{M}_U$ beginnt zunächst mit einer Initialisierung, die aus den folgenden drei Teilen besteht.

1. Prüfe, ob der erste Teil der Eingabe $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$ eine gültige Turingmaschine codiert.

   Die Menge der gültigen Codierungen kann mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik beschrieben werden (siehe Übungen).

2. Verschiebe $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$ auf B_2. Schreibe dabei Blanksymbole auf die Bandzellen von B_1. Überschreibe anschließend das Symbol #, das die Eingabeturingmaschine und das Eingabewort trennt, durch ein Blanksymbol.

3. Schreibe 0 (also die Codierung des Startzustands von $\mathcal{M}$) auf B_3.

Nach der Initialisierung ist $\mathcal{M}_U$ also in der folgenden Konfiguration.

B_1 : w

$B_2 : \ulcorner \mathcal{M} \urcorner$

$B_3 : 0$

Nach der Initialisierung wird $\mathcal{M}_U$ das Verhalten von $\mathcal{M}$ nachahmen. Für jeden Schritt von $\mathcal{M}$ macht $\mathcal{M}_U$ dabei die folgenden Schritte.

Suche ein Element (q, a, q', a', d) der Transitionsfunktion δ von $\mathcal{M}$, das zum aktuellen Zustand q und zum aktuellen Bandsymbol a passt.

Wir laufen hierfür einmal über das komplette Band B_2. Zustände werden zeichenweise mit dem Inhalt von B_3 verglichen. Die Zuordnung von Alphabetsymbolen a zur Codierung $\ulcorner a \urcorner$ ist fest in $\mathcal{M}_U$ eingebaut.

- Falls solch ein Element der Transitionsfunktion existiert, schreibe auf B_1 das Zeichen a' und bewege den Kopf wie durch d definiert. Ersetze außerdem die Codierung $\ulcorner q \urcorner$ auf B_3 durch $\ulcorner q' \urcorner$. Fahre anschließend mit dem Nachahmen des nächsten Schritts von $\mathcal{M}$ fort.
- Falls kein solches Element der Transitionsfunktion existiert, hat $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht. Wir vergleichen nun den aktuellen Zustand (auf B_3) mit den auf B_2 gespeicherten akzeptierenden Zuständen und akzeptieren oder verwerfen die Eingabe entsprechend.

Satz 6.1: Die universelle TM $\mathcal{M}_U$ erfüllt die Eigenschaften (5), (6) und (7).

7 Berechenbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass es Sprachen gibt, die von keiner TM akzeptiert werden können, und dass es Funktionen gibt, die von keiner TM berechnet werden können.

7.1 Das Gesetz von Church-Turing (Churchsche These)

These: Jede intuitiv berechenbare Funktion ist mit einer TM (in formalem Sinn) berechenbar.

„Intuitiv berechenbar“ ≡ man kann einen Algorithmus hinschreiben

- endliche Beschreibung
- jeder Schritt effektiv durchführbar
- klare Vorschrift

Status wie Naturgesetz – nicht beweisbar

→ allgemein anerkannt

→ Weitere Versuche um Berechenbarkeit zu formulieren haben sich als äquivalent zu einer TM erwiesen.

Def. 7.1: Eine (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt *berechenbar*, wenn es eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ gibt, sodass f die von $\mathcal{M}$ berechnete Funktion ist. ◇

Bemerkung: In der Literatur wird in Def. 7.1 oft auch nicht der Begriff *berechenbar*, sondern die Begriffe *Turing-berechenbar* oder *rekursiv* verwendet. Die Intention dahinter ist, den Begriff *berechenbar* für „intuitiv berechenbar“ aufzusparen. Wir wollen uns hier aber ganz auf die Churchsche These verlassen und zur Vereinfachung den Begriff auch formal besetzen.

7.2 Nicht berechenbare Funktionen

Vorlesung: 19.01.2018

Wir werden nun zeigen, dass es Funktionen gibt, die nicht berechenbar sind. Unser Vorgehen wird dabei das folgende sein.

- Wir zeigen, dass es so viele Turingmaschinen wie natürliche Zahlen gibt.
- Wir zeigen, dass es mehr Funktionen als natürliche Zahlen gibt.

Da es unendlich viele natürliche Zahlen, Turingmaschinen und Funktionen gibt, sind die aus der Schule bekannten Formalismen zum Vergleichen von Mengen (die Größe einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente) nicht anwendbar. Wir werden daher über die Existenz von bijektiven Abbildungen argumentieren.

Bemerkung: Zum Verständnis dieses Kapitels ist es nötig, sich mit den Begriffen *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* vertraut zu machen, z.B. mit Hilfe von Aufgabe 4 von Übungsblatt 11.

Wir führen zunächst die folgenden drei Begriffe ein.

Def. 7.2 (Abzählbar, Überabzählbar)**:** Eine Menge X heißt

- *abzählbar unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen X und $\mathbb{N}$ gibt,
- *abzählbar*, wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist und
- *überabzählbar*, wenn X unendlich ist und es keine bijektive Abbildung zwischen X und $\mathbb{N}$ gibt. ◇

Ein klassisches Vorgehen, um die Existenz nicht berechenbarer Funktionen zu zeigen, besteht aus den folgenden Schritten.

1. Die Menge der Turingmaschinen ist abzählbar.
2. Die Menge aller Funktionen ist überabzählbar.
3. Es kann daher nicht zu jeder Funktion auch eine Turingmaschine geben.

Wir wollen hier das folgende, leicht andere, Vorgehen wählen. Dieses ist weniger allgemein, erlaubt aber etwas leichter nachzuvollziehende Beweise.

1. Es gibt für jede Turingmaschine eine natürliche Zahl.
2. Es gibt für jedes Element der Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Funktion.
3. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat „sehr viel mehr“ Elemente als $\mathbb{N}$. Es kann daher nicht zu jeder Funktion auch eine Turingmaschine geben.

Zur Vereinfachung werden wir uns in diesem Unterkapitel auf das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ beschränken.

Erinnerung: Die Funktion bin : $\Sigma^* \to \mathbb{N}$ ist die in Unterabschnitt 2.3 eingeführte Decodierung von Binärstrings (Wörtern über $\{0, 1\}$) in natürliche Zahlen.

Wir möchten zunächst eine bijektive Abbildung zwischen Binärstrings und natürlichen Zahlen definieren. Die Funktion bin ist hierfür ungeeignet, da führende Nullen ignoriert werden und z.B. sowohl 1 als auch 01 auf die 1 abgebildet werden.

Wir führen deshalb die *Standardnummerierung* ein, die auf den folgenden Ideen basiert.

- Nummeriere alle Binärstrings der Länge nach; bei gleicher Länge gibt die Funktion bin die Reihenfolge vor.
- Es gibt 2^n Binärstrings der Länge n.
- Für einen Binärstring der Länge n gibt es also $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ Binärstrings mit kürzerer Länge.

Lemma 7.1: Die Standardnummerierung $\text{stdnum} : \Sigma^* \to \mathbb{N}$

$$\text{stdnum}(a_1 \dots a_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_1 \dots a_n = \varepsilon \\ 2^n - 1 + \text{bin}(a_1 \dots a_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine bijektive Abbildung.

$w \in \{0,1\}^*$	$\text{stdnum}(w)$	Berechnung
ε	0	
0	1	$2^0 + 0$
1	2	$2^0 + 1$
00	3	$2^0 + 2^1 + 0$
01	4	$2^0 + 2^1 + 1$
110	13	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 6$
$\ulcorner \mathcal{M}_r \urcorner$	72057594037927935	$2^{55} - 1 + 32977455905055295$

Abb. 11: Standardnummerierung für einige Beispielwerte; dabei ist $\ulcorner \mathcal{M}_r \urcorner$ die in Bsp. 6.4 bestimmte Codierung der 1-Schritt-Rechtsmaschine.

Def. 7.3: Sei $w \in \{0,1\}^*$. Die *durch w codierte TM* $\mathcal{M}_w$ ist wie folgt definiert.

$$\mathcal{M}_w = \begin{cases} \mathcal{M} & \text{falls } w \text{ Code einer TM ist und } \ulcorner \mathcal{M} \urcorner = w \\ \mathcal{D}_\sqcup & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $\mathcal{D}_\sqcup$ die in Bsp. 6.1 definierte Druckmaschine.[28] ◇

Notation: Wir verwenden im Folgenden *TMACH* für die Menge aller Turingmaschinen, bei denen

- jeder Zustand Q mindestens einmal in der Turingtabelle vorkommt[29] oder akzeptierend ist und

[28] Für den weiteren Verlauf ist es nicht wichtig, dass wir hier die Druckmaschine gewählt haben. Jede andere TM wäre ebenso gut geeignet gewesen.

[29] Ein Zustand $q \in Q$ *kommt in der Turingtabelle vor*, wenn das Folgende gilt: $\exists a \in \Gamma : \delta(q,a) \neq \emptyset \vee \exists p \in Q, \exists a' \in \Gamma, \exists d \in \{L,N,R\} : (q,a',d) \in \delta(p,a)$.

- jedes Zeichen aus $\Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\sqcup\})$ mindestens einmal in der Turingtabelle vorkommt.

Bemerkung: Im Folgenden genügt es, wenn wir uns auf TMs aus *TMACH* einschränken. Gibt es eine TM, die eine Funktion f berechnet, so gibt es auch eine TM aus *TMACH*, die f berechnet.

Lemma 7.2: Die Abbildung $\text{bin2tm} : \Sigma^* \to \mathit{TMACH}$

$$\text{bin2tm}(w) = \mathcal{M}_w$$

ist surjektiv.

Lemma 7.3: Die Abbildung $\text{func2power} : (\Sigma^* \to \Sigma^*) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\text{func2power}(f) = \{\text{stdnum}(w) \mid f(w) = 1\}$$

ist surjektiv.

f	$\{w \mid f(w) = 1\}$	$\text{func2power}(f)$
Inkrement von Binärzahlen	$\{\varepsilon, 0\}$	$\{0, 1\}$
Identitätsfunktion	$\{1\}$	$\{2\}$
„alles auf eins“	Σ^*	$\mathbb{N}$

Abb. 12: func2power für einige Beispielwerte

Satz 7.4 (Cantor)**:** Es gibt keine surjektive Abbildung einer Menge in ihre Potenzmenge.

Den Beweis dieses Satzes werden wir später diskutieren.

Satz 7.5: Es gibt Funktionen, die nicht berechenbar sind.

Beweis: Angenommen, jede Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei berechenbar. Dann gibt es für jede Funktion f eine TM $\mathcal{M}$ mit $f_{\mathcal{M}} = f$ und somit eine surjektive Abbildung $g : \mathit{TMACH} \to (\Sigma^* \to \Sigma^*)$. Nach Lemma 7.2 und Lemma 7.3 wäre dann aber auch die Abbildung $\text{func2power} \circ g \circ \text{bin2tm} \circ \text{stdnum}^{-1} : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ surjektiv. Dies steht im Widerspruch zu Satz 7.4. □

Ein zentraler und nicht offensichtlicher Teil dieses Beweises war Satz 7.4. Wir wollen diesen im restlichen Unterkapitel diskutieren. Zunächst geben wir einen formalen Beweis.

Beweis (Von Satz 7.4): Sei X eine beliebige Menge. Angenommen, es gäbe eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Betrachte die Menge $Z = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $z \in X$, sodass $f(z) = Z$. Nach Definition der Menge Z gilt nun aber $z \in f(z) \Leftrightarrow z \notin f(z)$. Widerspruch! □

Ein Beweis dieser Form wird auch *Diagonalargument* genannt und ist nicht einfach zu verstehen. Wir werden nun den Beweis für den Spezialfall, dass X eine abzählbare Menge ist, illustrieren.

Da X abzählbar ist, können wir dessen Elemente als unendliche Sequenz $x_0, x_1, \ldots$ aufschreiben. Wir nehmen nun an, es gäbe eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Dann können wir f mit Hilfe der folgenden Matrix darstellen. Zeile i beschreibt dabei das Bild $f(x_i)$. Wir haben eine Spalte für jedes $x_j \in X$. Gilt $x_j \in f(x_i)$, so steht in Eintrag (i, j) ein Y. Ansonsten steht dort ein N.

Da f surjektiv ist, muss es auch für die im formalen Beweis oben erwähnte Menge $Z = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$ eine Zeile geben. Diese Zeile – wir nehmen an, es sei die Zeile für $f(x_k)$ – enthält nun in Spalte j immer genau das Inverse des Diagonaleintrags (j, j). Da der Diagonaleintrag (k, k) nicht invers zu sich selbst sein kann, haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme.

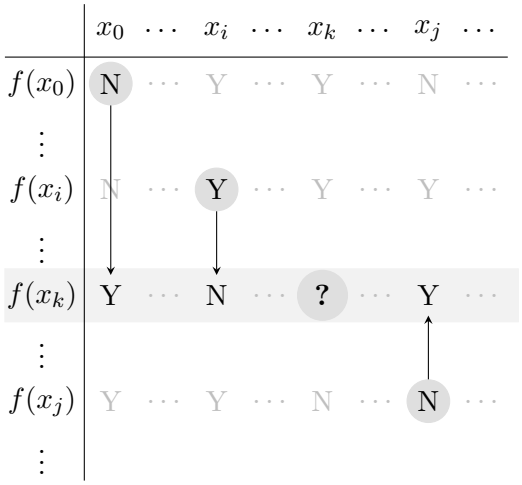


Abb. 13: Illustration des Diagonalarguments beim Beweis des Satzes von Cantor

Zum Ende des Unterkapitels möchten wir Diagonalargumente nochmal aus einem anderen Blickwinkel, mit Hilfe eines Rätsels, betrachten.

Rätsel: Der legendäre *Barbier von Waldkirch* rasierte genau die Männer, die sich nicht selbst rasierten. Gab es den Barbier von Waldkirch wirklich?

Wir betrachten zum Lösen dieses Rätsels die folgende quadratische Matrix, die je eine Zeile und eine Spalte für jeden Mann aus Waldkirch hat. Eintrag (i, j) enthält genau dann ein Y, wenn der i-te Mann den j-ten Mann rasiert. Gab es den Barbier von Waldkirch, so muss er in einer Zeile zu finden sein. Nehmen wir an, das sei die k-te Zeile. In dieser Zeile enthält nun der Eintrag in der i-ten Spalte immer genau das Inverse des Diagonaleintrags

(i, i). Da der Diagonaleintrag (k, k) nicht invers zu sich selbst sein kann, kann es keine Zeile für den Barbier von Waldkirch geben.

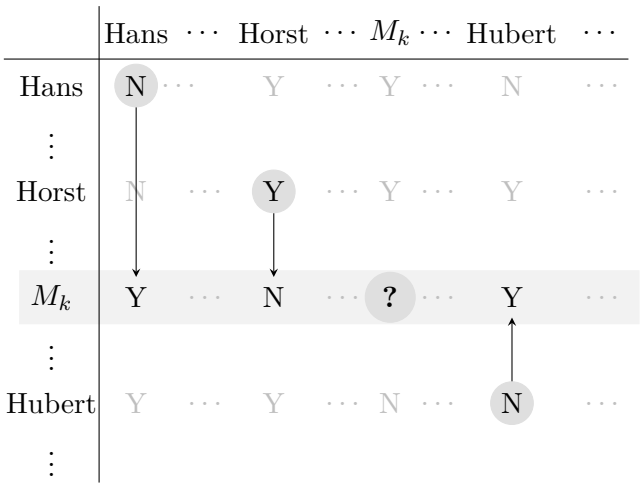


Abb. 14: Illustration des Diagonalarguments beim Rätsel des Barbiers von Waldkirch

7.3 Sprachakzeptanz und Berechenbarkeit

Wir möchten nun die Idee von Berechenbarkeit auch auf die zweite Aufgabe von Turingmaschinen, das Akzeptieren von Sprachen, übertragen. Wir definieren dafür die Menge der Sprachen, für die eine Lösung für das Wortproblem (also $w \in L$?) berechnet werden kann, wie folgt.

Def. 7.4: Sei $\mathcal{M}$ eine TM. Wir sagen $\mathcal{M}$ *entscheidet* $L \subseteq \Sigma^*$, falls die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

1. $\mathcal{M}$ akzeptiert L.
2. $\mathcal{M}$ hält für jede Eingabe an.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls es eine TM gibt, die L entscheidet.[30] ◇

Satz 7.6: Es gibt Sprachen, die nicht entscheidbar sind.

Vorlesung: 24.01.2018

Beweis: Wähle $\Sigma = \{0, 1\}$ und definiere die Funktion lang2power : $\Sigma^* \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\text{lang2power}(L) = \{\text{stdnum}(w) \mid w \in L\}$$

[30] Ein alternativer in der Literatur auch oft verwendeter Begriff für „entscheidbar“ ist „rekursiv“.

(analog zu Lemma 7.3) und zeige, dass diese surjektiv ist. Führe anschließend analog zum Beweis von Satz 7.5 einen Widerspruchsbeweis. Annahme: Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei entscheidbar. Also gibt es eine surjektive Abbildung $g : \mathit{TMACH} \to \Sigma^*$. Somit wäre auch

$$\text{lang2power} \circ g \circ \text{bin2tm} \circ \text{stdnum}^{-1} : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

surjektiv. Dies steht im Widerspruch zu Satz 7.4. □

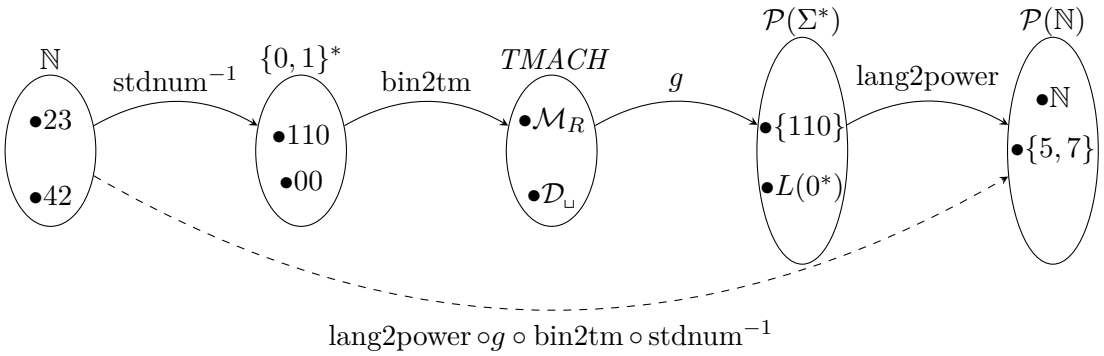


Abb. 15: Konkatenierte Abbildung aus dem Widerspruchsbeweis zu Satz 7.6

Def. 7.5 (Charakteristische Funktion)**:** Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Die *charakteristische Funktion* $\chi_L : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ ist wie folgt definiert:

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{falls } w \notin L \end{cases}$$ ◇

Der folgende Satz zeigt uns nun einen direkten Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben einer Turingmaschine, dem Berechnen von Funktionen und dem Akzeptieren von Wörtern.

Satz 7.7: Sei $\{0, 1\} \subseteq \Sigma$. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn die charakteristische Funktion χ_L berechenbar ist.

7.4 Das Halteproblem

Aus den bisherigen Sätzen wissen wir nur, dass es nicht berechenbare Funktionen und unentscheidbare Sprachen geben muss. Es besteht also noch Hoffnung, dass kein praxisrelevantes Problem betroffen ist. In diesem Kapitel werden wir nun aber für ein ganz konkretes praxisrelevantes Problem die Unentscheidbarkeit nachweisen.

Def. 7.6: Das spezielle Halteproblem besteht aus allen Codes von TMs, die anhalten, falls sie auf den eigenen Code angesetzt werden.

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\} \qquad \diamond$$

Satz 7.8: Das spezielle Halteproblem ist unentscheidbar.

Wir geben zunächst einen kurzen formalen Beweis mit Hilfe eines Diagonalarguments und diskutieren diesen anschließend.

Beweis: Angenommen, $\mathcal{M}_\in$ wäre eine TM, die K entscheidet. Dann gibt es auch eine TM $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$, (siehe Abb. 16) die zunächst $\mathcal{M}_\in$ auf ihre Eingabe anwendet.[31] Falls $\mathcal{M}_\in$ akzeptiert, dann geht $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ in eine Endlosschleife. Falls $\mathcal{M}_\in$ nicht akzeptiert, dann hält $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ an. Nun gilt:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_\in \text{ akzeptiert } \ulcorner \mathcal{M}_{\mathsf{evil}} \urcorner & \overset{\text{Def. von } K}{\text{gdw.}} & \mathcal{M}_{\mathsf{evil}} \text{ angesetzt auf } \ulcorner \mathcal{M}_{\mathsf{evil}} \urcorner \text{ hält} \\ & \overset{\text{Def. von } \mathcal{M}_{\mathsf{evil}}}{\text{gdw.}} & \mathcal{M}_\in \text{ akzeptiert } \ulcorner \mathcal{M}_{\mathsf{evil}} \urcorner \text{ nicht} \end{array}$$

Ein Widerspruch. □

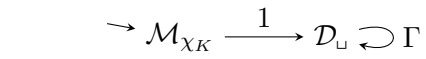


Abb. 16: Definition der TM $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ aus dem Beweis von Satz 7.8 mit Hilfe eines Flussdiagramms. Die TM $\mathcal{M}_{\chi_K}$ verhält sich wie $\mathcal{M}_\in$, aber statt zu akzeptieren (bzw. nicht zu akzeptieren), schreibt diese 1 (bzw. 0) auf das Band und hält (siehe Satz 7.7).

Wir wollen diesen Beweis nun wieder graphisch illustrieren. Die folgende Matrix enthält eine Spalte für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$. Wir wählen z.B. $w_i = \text{stdnum}^{-1}$ und aus der Bijektivität von stdnum folgt, dass jedes $w \in \{0,1\}^*$ einmal vorkommt. Wir haben außerdem unendlich viele Zeilen. In Zeile i steht die durch w_i codierte TM. Aus Lemma 7.2 folgt also, dass jede TM in mindestens einer Zeile vorkommt. In Eintrag (i,j) steht ein Y, wenn $\mathcal{M}_{w_i}$ angesetzt auf w_j hält, und ansonsten ein N. (Wir können diese Tabelleneinträge zwar nicht berechnen, doch dies ist hier nicht wichtig.) Die TM $\mathcal{M}_\in$, deren Existenz wir im Beweis angenommen haben (die für alle $w \in \{0,1\}^*$ entscheidet, ob $\mathcal{M}_w$ angesetzt auf w hält) ist eine TM, die alle Diagonaleinträge in unserer Matrix bestimmen kann. Die daraufhin konstruierte TM $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ (siehe Abb. 16) muss in irgendeiner

[31] Der Name $\mathcal{M}_\in$ soll den hohen Wert dieser TM betonen. Gäbe es einen Algorithmus zur Terminierungsanalyse, könnten wir damit viele Probleme in der Softwareentwicklung lösen. Der Name $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ soll suggerieren, dass diese TM unsere entsprechenden Hoffnungen zunichte macht.

Zeile vorkommen. Sei w_k das Wort, das die TM $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ codiert (also $\mathcal{M}_{w_k} = \mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$). Die Definition von $\mathcal{M}_{\mathsf{evil}}$ sagt uns, dass die Zeile $\mathcal{M}_{w_k}$ in Spalte i immer genau das Gegenteil (Y/N) des Diagonaleintrags (i, i) enthält. Die Betrachtung des Diagonaleintrags (k, k) zeigt uns den Widerspruch. Die Annahme der Existenz von $\mathcal{M}_\epsilon$ war also falsch.

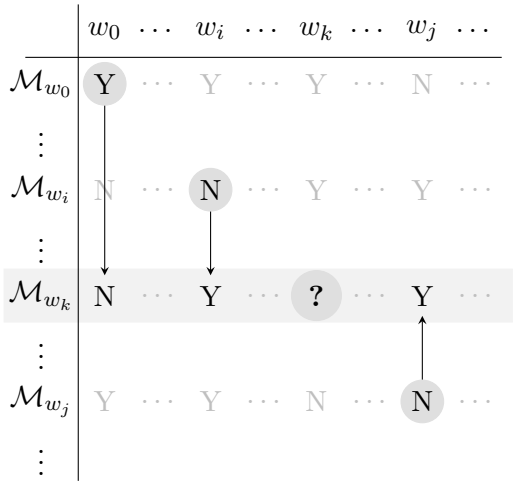


Abb. 17: Illustration des Diagonalarguments beim Beweis der Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Korollar 7.9: Das Komplement von K

$$\overline{K} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält nicht}\}$$

ist nicht entscheidbar. ◇

Beweis: Angenommen, $\overline{K}$ sei entscheidbar durch eine TM $\mathcal{M}$. Betrachte TM $\mathcal{M}'$, die zunächst $\mathcal{M}$ ausführt und dann das Ergebnis negiert. $\mathcal{M}'$ entscheidet K. Widerspruch zu Satz 7.8. □

Def. 7.7: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *semi-entscheidbar*, falls es eine TM gibt, die L akzeptiert.[32] ◇

Lemma 7.10: K ist semi-entscheidbar.

Beweis: Die wie folgt konstruierte TM $\mathcal{M}$ akzeptiert K. Sei w die Eingabe. Führe die universelle TM für $\mathcal{M}_w$ mit Eingabe w aus. Falls diese Simulation stoppt, geht $\mathcal{M}$ in einen akzeptierenden Zustand und hält. □

[32] Ein alternativer in der Literatur auch oft verwendeter Begriff für „semi-entscheidbar“ ist „rekursiv aufzählbar“.

Satz 7.11: Wenn eine Sprache L und ihr Komplement $\overline{L}$ semi-entscheidbar sind, dann ist L entscheidbar.

BEWEIS: Sei $\mathcal{M}$ eine TM, die L akzeptiert, und sei $\overline{\mathcal{M}}$ eine TM, die $\overline{L}$ akzeptiert. Führe $\mathcal{M}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ „parallel“ mit der gleichen Eingabe aus (z.B. mit einer 2-Band-TM).
Eine TM muss anhalten, da für alle Eingaben w entweder $w \in L$ oder $w \in \overline{L}$ gilt.

- Falls $\mathcal{M}$ akzeptiert – halte und akzeptiere.
- Falls $\overline{\mathcal{M}}$ akzeptiert – halte aber akzeptiere nicht. □

Korollar 7.12: Das Komplement des speziellen Halteproblems $\overline{K}$ ist nicht semi-entscheidbar. ◇

BEWEIS: Nach Lemma 7.10 ist K semi-entscheidbar. Angenommen, $\overline{K}$ sei auch semi-entscheidbar. Dann wäre K nach Satz 7.11 entscheidbar. Widerspruch zu Satz 7.8. □

Def. 7.8 (Reduktion)**:**
Seien $U, V \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. *U ist auf V reduzierbar (Notation: $U \preceq V$)*, falls eine totale, berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, sodass

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in U \iff f(w) \in V. \qquad \diamond$$

Lemma 7.13: Falls $U \preceq V$ gilt und die Sprache V (semi-)entscheidbar ist, dann ist auch die Sprache U (semi-)entscheidbar.

BEWEIS: Sei $\mathcal{M}_V$ eine TM, die ein (Semi-)Entscheidungsverfahren für V implementiert, und sei $\mathcal{M}_f$ eine TM, die f berechnet. Konstruiere $\mathcal{M}_U$ wie folgt:

- Wende erst $\mathcal{M}_f$ auf die Eingabe w an.
- Führe dann $\mathcal{M}_V$ auf dem Ergebnis $f(w)$ aus.

Da f total ist, hält $\mathcal{M}_f$ immer. $\mathcal{M}_U$ hält also genau dann, wenn $\mathcal{M}_V$ hält. □

Bemerkung: Mit der Kontraposition von Lemma 7.13 können wir zeigen, dass eine Sprache *nicht* (semi-)entscheidbar ist.

- $U \preceq V$ und U unentscheidbar $\Rightarrow$ V unentscheidbar.
- $U \preceq V$ und U nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow$ V nicht semi-entscheidbar.

Def. 7.9: Das *Halteproblem* ist definiert durch

$$H = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \# w \mid \mathcal{M} \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}. \qquad \diamond$$

Satz 7.14: H ist unentscheidbar.

BEWEIS: Wir zeigen die Reduktion $K \preceq H$ mittels der folgenden Funktion f. $f(w) = w\#w$, falls w eine TM codiert, und ansonsten bildet f auf ein Wort v ab, das nicht in H liegt, z.B. ε. Die Funktion ist offensichtlich total und berechenbar.

$$\begin{aligned} w \in K &\iff \mathcal{M}_w \text{ hält bei Eingabe } w \text{ an} \\ &\iff \underbrace{w\#w}_{f(w)} \in H \end{aligned}$$ □

Satz 7.15: H ist semi-entscheidbar.

BEWEIS: Die wie folgt konstruierte TM $\mathcal{M}$ akzeptiert H. Zunächst simuliert $\mathcal{M}$ die universelle TM auf der Eingabe $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w$. Falls diese Simulation stoppt, geht $\mathcal{M}$ in einen akzeptierenden Zustand und hält. □

Def. 7.10: Das *Halteproblem auf dem leerem Band* ist definiert durch

$$H_\varepsilon = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ angesetzt auf das leere Band hält}\}.$$ ◇

Satz 7.16: H_ε ist unentscheidbar.

BEWEIS: Wir zeigen die Reduktion $H \preceq H_\varepsilon$ mittels der Funktion f, die in der Eingabe das erste Vorkommen von # sucht und für die zerlegte Eingabe $v = w\#x$ die wie folgt definierte TM $\ulcorner\mathcal{M}_{w,x}\urcorner$ konstruiert.

- Zuerst schreibt $\mathcal{M}_{w,x}$ das Wort x auf das leere Band (und läuft zum Anfang).
- Dann wendet $\mathcal{M}_{w,x}$ die durch w codierte TM $\mathcal{M}_w$ auf x an.

Enthält die Eingabe das Zeichen # nicht oder codiert w keine TM, so bildet f auf den Code irgendeiner TM ab, deren Code nicht in H_ε liegt.[33]

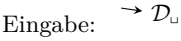
Offensichtlich ist f total und berechenbar und es gilt $v \in H$ gdw. $f(v) \in H_\varepsilon$. □

Bemerkung: Die Reduktion gilt auch in der umgekehrten Richtung „$H_\varepsilon \preceq H$“ (ohne Beweis). Mit Satz 7.15 und Lemma 7.13 ist H_ε damit auch semi-entscheidbar.

Vorlesung: 26.01.2018

Bemerkung: Das Phänomen des Halteproblems (oder des Barbiers von Waldkirch) tritt immer dann auf, wenn man in einem Formalismus über den Formalismus selbst sprechen kann (Selbstreferenzialität). Wir können z.B. universelle TMs konstruieren, die andere TMs (und damit auch sich selbst) simulieren.

Selbstreferenzialität existiert z.B. auch in der natürlichen Sprache („Dieser Satz ist falsch.“). Weitere für die Mathematik/Informatik relevante Beispiele sind die Unentscheidbarkeit (des Gültigkeitsproblems) der Prädikatenlogik und die Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik (erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz).

[33] Wir könnten z.B. die durch das folgende Flussdiagramm beschriebene TM nehmen, denn diese hält auf keiner Eingabe: 

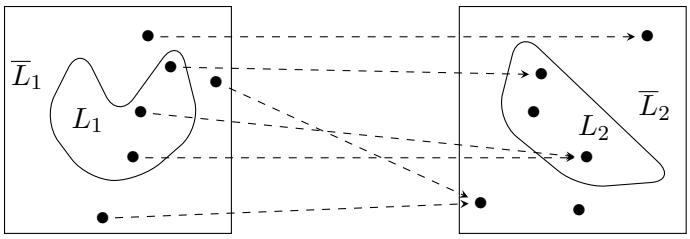


Abb. 18: Schematische Reduktion $L_1 \preceq L_2$ von einer Sprache L_1 auf eine Sprache L_2

Reduzierbarkeit ($\preceq$) ist eine binäre Relation auf Sprachen. Wir nennen diese Relation die *Reduktionsrelation*.

Satz 7.17: Die Reduktionsrelation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv.

Beweis: Siehe Übungsblatt 13. □

Bemerkung: Lemma 7.13 hilft uns, eine beliebige Sprache L zu klassifizieren.

- „L ist entscheidbar“:
  Reduktion $L \preceq L_E$ für entscheidbares L_E (oder expliziter[34] Algorithmus)
- „L semi-entscheidbar“:
  Reduktion $L \preceq L_{SE}$ für semi-entscheidbares L_{SE} (oder expliziter Algorithmus)
- „L unentscheidbar“:
  Reduktion $L_U \preceq L$ für unentscheidbares L_U
- „L nicht semi-entscheidbar“:
  Reduktion $L_{NSE} \preceq L$ für nicht semi-entscheidbares L_{NSE}

Bemerkung: Empfohlene Vorgehensweise zum Führen eines Reduktionsbeweises:

1. Reduktionsrichtung bestimmen
2. passende Sprache für Reduktion finden
3. Reduktionsfunktion f angeben
4. angeben, dass und ggf. warum f total und berechenbar ist
5. Äquivalenz „$w \in L_1$ gdw. $f(w) \in L_2$“ zeigen
6. verwendete Eigenschaft der gewählten Sprache ((un-/semi-)entscheidbar) angeben und damit die zu zeigende Aussage folgern

[34] Eine Reduktion repräsentiert implizit auch einen Algorithmus.

	$\mathcal{M}$ beliebig	$\mathcal{M}$ fest
w beliebig	$H = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w \mid \mathcal{M} \text{ hält auf } w\}$	$H_{\mathcal{M}} = \{w \mid \mathcal{M} \text{ hält auf } w\}$
w fest	$H_w = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ hält auf } w\}$	$H_{\mathcal{M},w} = \left\{ \ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathcal{M} \text{ hält auf } w,\\ \mathcal{M} \text{ und } w \text{ fest}\end{array} \right\}$

Abb. 19: Verschiedene Halteprobleme mit TM $\mathcal{M}$ und Eingabe w

Lemma 7.18: Für jedes feste $w \in \Sigma^*$ ist H_w unentscheidbar.

Beweis: Für $w = \varepsilon$ haben wir in Satz 7.16 bereits gesehen, dass H_ε unentscheidbar ist. Der Beweis dazu funktioniert analog für beliebige Wörter w, wenn wir „das leere Band“ durch „die Eingabe w“ ersetzen. □

Lemma 7.19: Es gibt TMs $\mathcal{M}$, für die $H_{\mathcal{M}}$ unentscheidbar ist.

Beweis: Es gilt $H = H_{\mathcal{M}_U}$. □

Bemerkung: Für manche TMs ist $H_{\mathcal{M}}$ entscheidbar, z.B. für $H_{\mathcal{M}_r}$.

Lemma 7.20: $H_{\mathcal{M},w}$ ist entscheidbar.

Beweis: Für eine feste Kombination $(\mathcal{M}, w)$ gilt entweder $H_{\mathcal{M},w} = \emptyset$ oder $H_{\mathcal{M},w} = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner\#w\}$. Beide Sprachen sind entscheidbar.[35] □

Nun betrachten wir TMs vom Blickwinkel der von ihnen berechneten (partiellen) Funktionen.

Satz 7.21 (Satz von Rice)**:**
Sei R die Menge aller (partiellen) berechenbaren Funktionen und S eine nichtleere, echte Teilmenge davon (also $\varnothing \subsetneq S \subsetneq R$). Dann ist die Sprache

$$C_S = \{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

unentscheidbar.

Beweis: Sei $\varnothing \subsetneq S \subsetneq R$ beliebig. Angenommen, es gibt eine TM $\mathcal{M}_{\in}$, die C_S entscheidet. Sei $\Omega \in R$ die überall undefinierte Funktion. Wir betrachten zwei Fälle.

- Fall 1: $\Omega \in S$

  Da $S \subsetneq R$ gilt, gibt es eine berechenbare Funktion $f \in R \setminus S$. Sei $\mathcal{M}_f$ eine TM, die f berechnet. Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig. Wir definieren zunächst die TM $\mathcal{M}_{w,f}$ wie

[35] Wichtig ist, dass unsere Definition von „entscheidbar“ nur die *Existenz* einer TM voraussetzt. Es gibt in diesem Fall keinen Algorithmus, eine entsprechende TM zu *berechnen*.

folgt: $\mathcal{M}_{w,f}$ führt zunächst die durch w codierte TM $\mathcal{M}_w$ auf der leeren Eingabe aus. Falls $\mathcal{M}_w$ anhält, wendet $\mathcal{M}_{w,f}$ dann $\mathcal{M}_f$ auf die tatsächliche Eingabe an. ($\mathcal{M}_{w,f}$ sollte also zunächst eine Kopie der Eingabe speichern, z.B. als 2-Band-TM, die ein Band für die Eingabe verwendet.)

Die von $\mathcal{M}_{w,f}$ berechnete Funktion ist also:

$$f_{\mathcal{M}_{w,f}} = \begin{cases} f & \text{falls } \mathcal{M}_w \text{ auf dem leerem Band hält,} \\ \Omega & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren nun die TM $\mathcal{M}_{\mathsf{Evil}}$ (abhängig von w) wie folgt: $\mathcal{M}_{\mathsf{Evil}}$ nimmt die Eingabe w, konstruiert die TM $\mathcal{M}_{w,f}$ und wendet $\mathcal{M}_\in$ auf $\ulcorner \mathcal{M}_{w,f} \urcorner$ an. Nun gilt:

$$\begin{aligned} M_\in \text{ akzeptiert } \ulcorner \mathcal{M}_{w,f} \urcorner &\iff \mathcal{M}_{w,f} \text{ berechnet eine Funktion in } S \\ &\iff \mathcal{M}_{w,f} \text{ berechnet } \Omega \\ &\iff \mathcal{M}_w \text{ hält } \textit{nicht} \text{ auf dem leeren Band} \end{aligned}$$

Also entscheidet $\mathcal{M}_{\mathsf{Evil}}$ die Sprache H_ε. Widerspruch zu Satz 7.16.

- Fall 2: $\Omega \notin S$

  Analog zu Fall 1. □

Bemerkung: Gibt es noch „schwerere“ Sprachen als das Halteproblem? In gewissem Sinne ja, denn es gibt Sprachen L, sodass sowohl L als auch $\overline{L}$ nicht semi-entscheidbar sind. Ein Beispiel ist das Halteproblem für *alle* Eingaben:

$$H_{\forall w} = \{\ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \mathcal{M} \text{ angesetzt auf jedes beliebige Wort } w \in \Sigma^* \text{ hält}\}$$

Satz 7.22: Seien L_1, L_2 entscheidbare Sprachen. Dann sind auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ und $\overline{L_1}$ entscheidbar.

Beweis: Seien L_1, L_2 beliebige entscheidbare Sprachen und $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ TMs, welche die Sprachen entscheiden.

„$\cup$“: Simuliere für eine Eingabe w zunächst $\mathcal{M}_1$ und dann $\mathcal{M}_2$. Akzeptiere, falls eine der beiden TMs akzeptiert.

„$\cap$“: Analog zu „$\cup$“; siehe Übungsblatt 12 Aufgabe 5.

„$\overline{L_1}$“: Simuliere $\mathcal{M}_1$ und akzeptiere genau dann, wenn $\mathcal{M}_1$ nicht akzeptiert. □

Satz 7.23: Seien L_1, L_2 semi-entscheidbare Sprachen. Dann sind auch $L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2$ semi-entscheidbar.

BEWEIS: Seien L_1, L_2 beliebige semi-entscheidbare Sprachen und $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ TMs, welche die Sprachen entscheiden.

„$\cup/\cap$“: Simuliere für eine Eingabe w zunächst $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ „parallel“ (z.B. mit einer 2-Band-TM). Akzeptiere entsprechend zu $\cup/\cap$. □

Bemerkung: Ist L_1 eine semi-entscheidbare Sprache, so ist $\overline{L}_1$ ist im Allgemeinen nicht semi-entscheidbar. Beispiel: Laut Lemma 7.10 und Korollar 7.12 ist das spezielle Halteproblem K semi-entscheidbar, $\overline{K}$ aber nicht.

7.5 Nichtdeterministische Turingmaschinen

Satz 7.24: Sei $\mathcal{M}$ eine NTM. Dann existiert eine DTM $\mathcal{M}'$, sodass gilt:

- $\mathcal{M}'$ akzeptiert $L(\mathcal{M})$.
- $\mathcal{M}'$ hält genau dann, wenn $\mathcal{M}$ hält.

BEWEIS (Skizze): Idee: In jedem Schritt gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, eine Transition zu wählen. Für eine feste Schrittzahl n ist die Anzahl der möglichen Konfigurationsfolgen also endlich. Wir legen ein n fest und probieren nacheinander alle möglichen Konfigurationsfolgen der Länge n durch. (Anders formuliert: Wir laufen in Breitensuche durch den (endlichen) Suchbaum und zählen alle Möglichkeiten auf. Dann simulieren wir nacheinander alle Möglichkeiten systematisch.) Finden wir eine Haltekonfiguration, so kann $\mathcal{M}'$ auch halten. Ansonsten müssen wir n erhöhen und eine neue Suche starten.

Sei r der höchste Grad an Nichtdeterminismus von $\mathcal{M}$. Wir konstruieren $\mathcal{M}'$ mit 3 Bändern, die auf Band 1 das Eingabewort w unverändert speichert. Auf Band 2 werden nach und nach alle Wörter über $\{1, \ldots, r\}$ der Länge nach und bei gleicher Länge in lexikografischer Reihenfolge erzeugt: ε, 1, 2, …, r, 11, 12, …, $1r$, 21, …, rr, 111, … . Auf Band 3 wird jeweils die Simulation der aktuellen Auswahl durchgeführt.

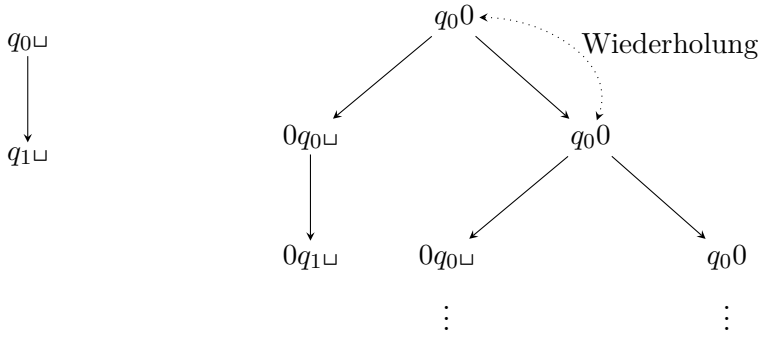
Wenn es eine gültige Konfigurationenfolge gibt, an deren Ende $\mathcal{M}$ akzeptiert, so wird $\mathcal{M}'$ diese irgendwann aufzählen und ebenfalls akzeptieren. Wenn nicht, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Der Suchbaum ist endlich, d.h., jede mögliche Konfigurationenfolge von $\mathcal{M}$ führt irgendwann in eine Haltekonfiguration. Dann hält $\mathcal{M}'$ irgendwann.
- Es gibt nicht-terminierende Konfigurationenfolgen von $\mathcal{M}$. Dann hält $\mathcal{M}'$ nie, sondern zählt immer längere Reihenfolgen auf. □

Bsp.: Betrachte die NTM $\mathcal{M} = (\{0,1\}, \{q_0, q_1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_0, \sqcup, \{q_0\})$ mit

$$\delta(q_0, 0) = \{(q_0, 0, R), (q_0, 0, N)\}$$
$$\delta(q_0, \sqcup) = \{(q_1, \sqcup, N)\}.$$

Auf manchen Eingaben hält $\mathcal{M}$ immer (z.B. auf $w_1 = \varepsilon$), auf manchen gibt es aber auch nicht-terminierende Ausführungen (z.B. auf $w_2 = 0$). Unten sind die Suchbäume für die Konfigurationsfolgen für w_1 und w_2 skizziert.



Bemerkung: Es werden u.U. Reihenfolgen aufgezählt, die nicht durchführbar sind. Das kann aber erkannt werden; in diesem Fall wird die Simulation einfach übersprungen.

Der Suchaufwand ist exponentiell (Suchbaum mit Verzweigungsgrad r).

8 Komplexitätstheorie

TODO: Dieser rote Teil des Skripts wir erst im Lauf des Wochenendes in einen akzeptablen Zustand gebracht.

Aus Info2 kennen Sie: Worst-case Laufzeit eines Algorithmus bestimmen.

Hier: Betrachte Problemstellung und bestime was Wort-case Laufzeit von bestmöglichem Algorithmus ist.

Def. 8.1: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und $\mathcal{M}$ eine NTM mit Eingabealphabet Σ.

- $\mathcal{M}$ hat *Zeitkomplexität* $f(n)$, falls $\forall w \in \Sigma^*$ mit Länge n gilt: $\mathcal{M}$ hält auf Eingabe w für jede Berechnung in höchstens $f(n)$ Schritten.
- $\mathcal{M}$ hat *Platzkomplexität* $f(n)$, falls $\forall w \in \Sigma^*$ mit Länge n gilt: Wenn $\mathcal{M}$ auf w angesetzt wird, benutzt jede Berechnung höchstens $f(n)$ Bandzellen. ◇

Def. 8.2: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion.

$$\begin{aligned}
\text{DTIME}(f(n)) &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{Es gibt det. Mehrband-TM } \mathcal{M}, \text{ sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
&\qquad \mathcal{M} \text{ hat Zeitkomplexität } f(n)\} \\
\text{NTIME}(f(n)) &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{Es gibt nichtdet. Mehrband-TM } \mathcal{M}, \text{ sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
&\qquad \mathcal{M} \text{ hat Zeitkomplexität } f(n)\} \\
\text{DSPACE}(f(n)) &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{Es gibt det. Mehrband-TM } \mathcal{M}, \text{ sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
&\qquad \mathcal{M} \text{ hat Platzkomplexität } f(n)\} \\
\text{NSPACE}(f(n)) &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{Es gibt nichtdet. Mehrband-TM } \mathcal{M}, \text{ sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
&\qquad \mathcal{M} \text{ hat Platzkomplexität } f(n)\}
\end{aligned}$$ ◇

Diagramm: Raute mit Inklusionen

Erklärung dazu.

Wir wollen im Folgenden Probleme als Sprachen darstellen und beginnen zunächst mit dem Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik.

Aussagenlogische Formeln als Sprachen

Wir gehen davon aus, dass die Leser des Skripts mit Aussagenlogik (AL)[36] vertraut sind, stellen die von uns verwendete Syntax vor und bitten den Leser, sich die entsprechende Semantik zu erschließen.

[36] Eine Einführung in Aussagenlogik finden Sie im Skript zur Vorlesung *Logik für Studierende der Informatik* aus dem WS 2017/18. Wir werden in dieser Vorlesung eine sehr ähnliche Notation verwenden. `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/ws17/logik-info.html`

Im Folgenden möchten wir Mengen von AL-Formeln als Sprachen beschreiben. Dafür müssen wir zunächst ein geeignetes Alphabet wählen. Dabei nehmen wir „0“ und „1“ für die Konstanten, „¬“, „∧“ und „∨“ für die Junktoren und runde Klammern „(“ und „)“. Bei der Darstellung der Aussagenvariablen stehen wir nun vor der folgenden Herausforderung: Es gibt unendliche viele Aussagenvariablen $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$, aber unser Alphabet kann nur endlich viele Zeichen haben. Unsere Lösung dafür ist sehr ähnlich wie die, die wir auch auf Papier verwenden. Wir stellen eine Aussagenvariable durch ein „A“ dar, das von einer Ziffernfolge gefolgt wird. Die Aussagenvariable A_{1337} wir so durch das Wort $A1337$ der Länge 5 repräsentiert. Wir müssen unser Alphabet also noch um „A“, „2“, … „9“ ergänzen und erhalten

$$\Sigma_{\mathsf{AL}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, \neg, \wedge, \vee, (,)\}.$$

Def. 8.3: Die Menge der AL-Formeln ist die Sprache der kontextfreien Grammatik $\mathcal{G}_{\mathsf{AL}} = (\Sigma_{\mathsf{AL}}, N, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} N &= \{S, Z\} \\ P &= \{S \to 0 \mid 1 \mid AZ \mid \neg S \mid (S \wedge S) \mid (S \vee S) \\ &\qquad Z \to 0Z \mid 1Z \mid 2Z \mid 3Z \mid 4Z \mid 5Z \mid 6Z \mid 7Z \mid 8Z \mid 9Z \mid \\ &\qquad\quad 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}. \end{aligned}$$ ◇

Wir nehmen nun unsere Definition von Formeln, um ein bekanntes Problem mit Hilfe einer Sprache zu beschreiben.

Def. 8.4: Wir nennen die Menge der erfüllbaren AL-Formeln SAT.

$$\mathrm{SAT} = \{F \mid F \in L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL}}) \text{ und } F \text{ erfüllbar}\}$$ ◇

Wir haben nun also die Frage, ob die Formel F erfüllbar ist, als Wortproblem „$F \in$ SAT?“ dargestellt. Wir wollen im Folgenden eine TM konstruieren, die SAT entscheidet, betrachten aber als Vorstufe hierfür zunächst eine einfachere Sprache.

Wir definieren uns $\mathcal{G}_{\mathsf{AL0}}$ als die obige Grammatik, in der die Regel $S \to AZ$ fehlt. Offensichtlich enthält $L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL0}})$ genau die AL-Formeln, die keine Aussagenvariablen enthalten.

Weiter definieren wir

$$\mathrm{SAT}_0 = \{F \mid F \in L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL0}}) \text{ und } F \text{ erfüllbar}\}$$

und konstruieren eine DTM, die SAT_0 entscheidet.

Bsp. 8.1: Sei $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}_0}$ eine DTM, deren Verhalten wir wie folgt informell beschreiben.

- Grundlegende Idee: Laufe von links nach rechts über die Eingabe und ersetze alle Operationen auf Konstantensymbolen direkt durch das Ergebnis (z.B. $1 \wedge 0 \rightsquigarrow 0$). Wiederhole dies, bis 0 oder 1 auf dem Band steht.
- Problem: Das Resultat dieser Operationen hat weniger Zeichen als die Eingabe.
- Lösung: Erweitere das Bandalphabet um ein Zeichen ■, um entstandene Leerstellen zu markieren (z.B. $1 \wedge 0 \rightsquigarrow 0$■■). Alternative: Verschiebe den Bandinhalt entsprechend.

Frage: Was ist die bestmögliche Laufzeitkomplexität, die wir für $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}_0}$ geben können?

Antwort: Wir müssen im schlimmsten Fall für jeden Operator einmal über die Eingabe laufen. Die Laufzeitkomplexität ist also „garantiert nicht viel schlimmer als n^2“, wobei n die Größe der Eingabe ist. Wir können die Laufzeitkomplexität aber nicht exakt angeben, da die Beschreibung von $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}_0}$ zu unpräzise ist. (Läuft der Kopf gelegentlich links und rechts über die Eingabe hinaus um das Wortende zu bestimmen? Läuft der Kopf beim Ersetzen zurück?)

Ein Formalismus zum Beschreiben von Aussagen wie „garantiert nicht viel schlimmer als . . . “ ist das (große) $\mathcal{O}$-Symbol der Bachmann–Landau-Notation. Wir gehen davon aus, dass die Leser des Skripts mit diesem Formalismus vertraut sind, wollen die Definition von (groß) $\mathcal{O}$ hier aber nochmal wiederholen.

Def. 8.5: Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, k \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot g(n)\} \qquad \diamond$$

Die Klasse $\mathcal{O}(g(n))$ enthält also genau die Funktionen, die für große Argumente durch ein Vielfaches von $g(n)$ beschränkt sind.

Über die Schwierigkeit von SAT_0 können wir nun also sagen: Es gibt ein $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, sodass $\mathrm{SAT}_0 \in \mathrm{DTIME}(f(n))$.

Bsp. 8.2: Sei $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}}$ eine NTM, deren Verhalten wir wie folgt informell beschreiben.

- Phase 1: Laufe über die Eingabe, sammle alle Aussagenvariablen $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, rate (wähle nichtdeterministisch) für jede davon eine Belegung b_{k_i} und schreibe

  $$A_{k_1} = b_{k_1}, \quad \ldots, \quad A_{k_n} = b_{k_n}$$

  auf ein zweites Band. Dabei soll jede Variable höchstens einmal geschrieben werden, auch wenn sie mehrfach in der Eingabe vorkommt.

  Zeitkomplexität: Ein Vergleich zweier Aussagenvariablen ist in $\mathcal{O}(n)$ möglich, pro Variablen müssen höchstens $\mathcal{O}(n)$ Vergleiche gemacht werden und in der Eingabe sind höchstens $\mathcal{O}(n)$ Variablen enthalten. Die Zeitkomplexität von Phase 1 kann also durch $\mathcal{O}(n^3)$ beschränkt werden.

- Phase 2: Laufe über die Eingabe und ersetze alle Aussagenvariablen durch die geratene Belegung.

  Zeitkomplexität: Durch $\mathcal{O}(n^3)$ beschränkt, nahezu gleiche Argumentation wie oben.

- Phase 3: Wende die in Bsp. 8.2 beschriebene DTM $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}_0}$ auf den Bandinhalt an.

  Zeitkomplexität: Durch $\mathcal{O}(n)^2$ beschränkt.

Die Zeitkomplexität von $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}}$ ist also durch $\mathcal{O}(n^3)$ beschränkt.

Über die Schwierigkeit von SAT können wir somit sagen: Es gibt ein $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$, sodass $\mathrm{SAT} \in \mathrm{NTIME}(f(n))$.

Frage: Angenommen, wir möchten ein schnelles Entscheidungsverfahren für SAT implementieren. Hilft uns dann die Konstruktionsidee von $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}}$?

Antwort: Eher nein. Die Konstruktion basiert darauf, dass wir nichtdeterministisch eine Belegung „raten“. Es ist unklar, wie wir diesen Nichtdeterminismus auf einem (deterministischen) Computer effizient implementieren können. Eine Möglichkeit wäre analog zum Beweis von Satz 7.24 alle nichtdeterministischen Wahlmöglichkeiten zu simulieren. Da wir $\mathcal{M}_{\mathrm{SAT}}$ aber pro Aussagenvariable nichtdeterministisch zwischen 0 und 1 wählen können, wäre das Verfolgen aller Wahlmöglichkeiten nur mit exponentiellem Aufwand möglich.

Frage: Gibt es ein „schnelles“ Entscheidungsverfahren für SAT oder ist das Problem so schwierig, dass es kein solches Verfahren geben kann?

Antwort: Die Informatik kann bisher (Stand Februar 2018) auf beide Frageteile keine Antwort liefern. Wir stellen aber im Folgenden einen Formalismus vor, mit dem sich diese Frage präziser formulieren lässt und wir für verwandte Fragen hilfreichere Antworten liefern können.

Um Missverständnisse in Terminologie und Notation zu vermeiden, wiederholen wir hier nochmal die aus der Schule bekannte Definition eines Polynoms.

Def. 8.6: Ein Polynom ist eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\exists k \in \mathbb{N}\ a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $p(n) = \sum_i^k a_i n^k$ ◇

Bemerkung: Die Funktion $f(n) = 2^n$ ist kein Polynom, da n hier ein Exponent ist.

Def. 8.7:

$$P = \bigcup_{p \text{ Polynom}} \mathrm{DTIME}(p(n))$$

$$NP = \bigcup_{p \text{ Polynom}} \mathrm{NTIME}(p(n))$$ ◇

Bemerkung: Die Laufzeitanalysen der TMs aus Bsp. 8.1 und Bsp. 8.2 zeigen, dass $\text{SAT}_0 \in P$ und $\text{SAT} \in NP$.

Offenbar gilt $P \subseteq NP$. Die Frage, ob $P = NP$ oder $P \neq NP$ gilt, wurde bereits 1971 von Stephen Cook gestellt und ist das vermutlich bekannteste ungelöste Problem der Informatik.

Das „P vs. NP"-Problem ist auch deshalb interessant, weil es eine Vielzahl praxisrelevanter Problemstellungen gibt (Travelling Salesman, Erfüllbarkeit der Aussagenlogik, ...), die in NP liegen, aber für die bisher nur (deterministische) Algorithmen mit mindestens exponentieller Laufzeit gefunden wurden.

Angenommen, wir wollen in unserem Unternehmen ein neues Problem lösen (z.B. automatisches Verteilen von miteinander kommunizierenden Benutzern auf verschiedene Server, sodass die Netzwerklast am geringsten ist). Angenommen, wir wissen bereits,

- dass wir das Problem mit einer NTM in polynomieller Zeit lösen könnten,
- dass für unsere Eingabegrößen eine polynomielle Laufzeit noch akzeptabel, aber eine exponentielle Laufzeit nicht mehr akzeptabel wäre und
- dass es einen approximativen Algorithmus gibt, der polynomielle Laufzeit hat, aber nicht immer optimale Resultate liefert.

Wie gehen wir nun weiter vor? Suchen wir nach einem (exakten) Algorithmus mit polynomieller Laufzeit oder geben wir auf und implementieren den approximativen Algorithmus?

Wir stellen im Folgenden einen Formalismus vor, mit dem wir Aussagen der folgenden Form machen können: „Ich weiß zwar nicht, ob meine neues Problem in P liegt oder nicht. Ich weiß aber, dass mein Problem so schwierig ist, dass das Finden eines polynomiellen Algorithmus $P = NP$ implizieren würde."

Def. 8.8 (Polynomielle Reduktion)**:**
Seien $U, V \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. *U ist auf V polynomiell reduzierbar (Notation: $U \preceq_p V$)*, falls eine totale, berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, sodass

- $\forall w \in \Sigma^* : w \in U \iff f(w) \in V$
- f wird von einer DTM berechnet, deren Laufzeitkomplexität ein Polynom ist.

Wir nennen f *Reduktionsfunktion.* ◇

Vorlesung: 02.02.2018

Eine aussagenlogische Formel F ist in *konjunktiver Normalform* (CNF)[37], wenn F eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist. Wir verwenden *CNF* als Notation für

[37] Die Abkürzung CNF wurde in Unterabschnitt 3.2 für die Chomsky-Normalform von kontextfreien Grammatiken benutzt, steht hier aber für die konjunktive Normalform von aussagenlogischen Formeln.

die Menge aller AL-Formeln in CNF. Analog schreiben wir *3CNF* für die Menge aller Formeln in CNF, bei denen jeder Konjunkt aus höchstens drei Disjunkten besteht.

Def. 8.9: Das Problem 3SAT ist wie folgt definiert.[38]

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel $F \in 3CNF$
Frage: Ist F erfüllbar?

◇

Alternativ könnten wir die Definition von 3SAT auch wie folgt aufschreiben.

$$3\text{SAT} = \{F \in L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL}}) \mid F \text{ ist erfüllbar und } F \text{ ist in 3CNF}\}$$

Offensichtlich gilt 3SAT $\preceq_p$ SAT.[39] Wir zeigen als Nächstes auch die umgekehrte Richtung.

Lemma 8.1: SAT $\preceq_p$ 3SAT

Beweis: Unser Ziel ist es nun, eine Transformation anzugeben, die sich in polynomieller Zeit berechnen lässt und jede aussagenlogische Formel F_{AL} in eine 3CNF-Formel F_{3CNF} überführt, sodass $F_{\mathsf{AL}} \in \text{SAT} \iff F_{\mathsf{3CNF}} \in 3\text{SAT}$ gilt.

Sei F_{AL} eine beliebige Formel aus $L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL}})$.

1. Erzeuge aus F_{AL} eine äquivalente Formel F_{NNF} in Negationsnormalform[40]. Wir können jede Formel in Negationsnormalform bringen, indem wir mit Hilfe der De Morganschen Regeln die Negationen „nach innen“ ziehen.

   Beispiel: $\neg(\neg(A_1 \vee \neg A_3) \vee A_2) \quad \rightsquigarrow \quad ((A_1 \vee \neg A_3) \wedge \neg A_2)$

   Ideen zur Implementierung: Erstelle auf einem zusätzlichen Band eine Kopie der Formel. Lasse vor jedem nicht negierten Literal ein Feld Platz, um später ggf. ein Negationssymbol zu platzieren. Wende De Morgans Regel von außen nach innen an. Laufe für jede Anwendung einmal über die Formel.

[38] Typischerweise nennt man Sprachen, die im Kontext der Komplexitätstheorie definiert werden, *Probleme*. Es ist üblich, von einem konkreten Alphabet Σ und einer konkreten Codierung der Objekte (hier: Formeln) zu abstrahieren und das Problem als (Gegeben, Frage)-Paar zu formulieren. Es bleibt dem Leser überlassen, sich selbst geeignete Alphabete und Codierungen zu überlegen. Für den Fall von aussagenlogische Formeln haben wir dies in TODO noch einmal gemacht, werden aber in Zukunft darauf verzichten.

[39] In der Vorlesung vom 02.02. wurde (fälschlicherweise) gesagt, die Identität sei eine geeignete Reduktionsfunktion. Dies ist nicht korrekt, da z.B. $(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4) \notin 3\text{SAT}$ (weil nicht in 3CNF), aber $(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4) \in \text{SAT}$.

[40] Eine Formel ist in Negationsnormalform, wenn der Negationsoperator immer nur direkt vor einer Variable vorkommt.

2. Erzeuge aus F_{NNF} eine Formel $F_{\alpha\gamma}$ mit Biimplikationszeichen „$\leftrightarrow$“ mit Hilfe der folgenden induktiv definierten Abbildungen α und γ.[41]

   Idee: Die Abbildung γ liefert für jede $\wedge$-Teilformel und jede $\vee$-Teilformel eine neue Hilfsvariable. Diese Hilfsvariable hat in der resultierenden Formel den Wahrheitswert, den die entsprechende Teilformel in der Eingabeformel hätte. Die Abbildung α konstruiert für jede Teilformel die entsprechenden Bedingungen für die Hilfsvariable. Erzeugt γ keine Hilfsvariable, so erzeugt α die (nicht einschränkende) Bedingung 1.

$$\gamma(F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } F = 0 \\ 1 & \text{falls } F = 1 \\ A & \text{falls } F = A \\ \neg F_1 & \text{falls } F = \neg F_1 \\ B_F & \text{falls } F = F_1 \wedge F_2 \\ B_F & \text{falls } F = F_1 \vee F_2 \end{cases}$$

$$\alpha(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F = 0 \\ 1 & \text{falls } F = 1 \\ 1 & \text{falls } F = A \\ 1 & \text{falls } F = \neg F_1 \\ (\gamma(F) \leftrightarrow \gamma(F_1) \wedge \gamma(F_2)) \wedge \alpha(F_1) \wedge \alpha(F_2) & \text{falls } F = F_1 \wedge F_2 \\ (\gamma(F) \leftrightarrow \gamma(F_1) \vee \gamma(F_2)) \wedge \alpha(F_1) \wedge \alpha(F_2) & \text{falls } F = F_1 \vee F_2 \end{cases}$$

   Wir definieren das Resultat $F_{\alpha\gamma} := \gamma(F_{\mathsf{NNF}}) \wedge \alpha(F_{\mathsf{NNF}})$.

   Beispiel:

$$\begin{aligned} \alpha((A_1 \vee \neg A_3) \wedge \neg A_2)) = {} & (B_{((A_1 \vee \neg A_3) \wedge \neg A_2)} \leftrightarrow (B_{(A_1 \vee \neg A_3)} \wedge \neg A_2)) \\ & \wedge (B_{(A_1 \vee \neg A_3)} \leftrightarrow (A_1 \vee \neg A_3)) \wedge 1 \wedge 1 \\ & \wedge 1 \end{aligned}$$

   Ideen zur Implementierung:

   Wähle ein Bandalphabet, sodass das Zeichen B enthalten ist. Verwende außerdem eine zusätzliche Art von Klammern (z.B. eckige Klammern), um den Subskriptanteil der B-Variablen vom restlichen Bandinhalt zu unterscheiden. Laufe für jede $\{\wedge, \vee\}$-Teilformel einmal über die Eingabe. Verwende ein zusätzliches Band zum

[41] Die hier beschriebene Transformation ist auch als Tseytin-Transformation bekannt.

Schreiben des Resultats. Verwende noch ein zusätzliches Band für die aktuell bearbeitete $\{\wedge, \vee\}$-Teilformel, da diese immer zweimal benötigt wird (Variablenname und α). Bearbeite äußere Teilformeln vor inneren. Lösche Teile, die nicht mehr benötigt werden.

3. Ersetze die Formelteile mit Biimplikationszeichen in $F_{\alpha\gamma}$ wie folgt durch logisch äquivalente Formeln in 3CNF.

   - $F_1 \leftrightarrow (F_2 \wedge F_3) \quad \rightsquigarrow \quad (F_1 \vee \neg F_2 \vee \neg F_3) \wedge (\neg F_1 \vee F_2) \wedge (\neg F_1 \vee F_3)$
   - $F_1 \leftrightarrow (F_2 \vee F_3) \quad \rightsquigarrow \quad (F_1 \vee \neg F_2) \wedge (F_1 \vee \neg F_3) \wedge (\neg F_1 \vee F_2 \vee F_3)$

   Ideen zur Implementierung:

   Verwende ein zusätzliches Band zum Schreiben des Resultats. Verwende noch ein zusätzliches Band für die Operanden der Biimplikation, da diese immer mehrfach benötigt werden.

4. Ersetze alle aussagenlogischen Variablen der Form B_F durch aussagenlogische Variablen der Form A_i.[42]

   Ideen zur Implementierung:

   Finde zunächst den höchsten Index i_{max} von A_i-Variablen (speichere aktuelles Maximum auf zusätzlichem Band). Verwende anschließend $i_{max}+1, i_{max}+2, \ldots$ für neue Variablen. Schreibe zunächst eine Übersetzungsvorschrift (z.B. $A_4 := B_{((A_1 \vee \neg A_3) \wedge \neg A_2)}, A_5 := B_{(A_1 \vee \neg A_3)}$) auf ein zusätzliches Band und ersetze erst dann.

Sei $f : \Sigma_{AL} \to \Sigma_{AL}$ eine Funktion, die alle Formeln aus $L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL}})$ entsprechend obiger Konstruktion abbildet und alle anderen Wörter unverändert lässt. Dann gilt:

- $F_{AL} \in \text{SAT} \iff f(F_{AL}) \in \text{3SAT}$ (hier ohne Beweis)
- f ist total und lässt sich in polynomieller Zeit berechnen (hier ohne Beweis). □

Lemma 8.2: Falls $A \preceq_p B$ und $B \in P$ (bzw. $B \in NP$), dann gilt auch $A \in P$ (bzw. $A \in NP$).

Beweis: $B \in P$: Nach Annahme gibt es eine TM $\mathcal{M}$, die B in $p(n)$ Schritten akzeptiert. Es gibt außerdem eine TM $\mathcal{M}_f$, welche die Reduktion $A \preceq_p B$ implementiert. Die Laufzeit von $\mathcal{M}_f$ sei durch das Polynom q beschränkt.
Betrachte $\mathcal{M}'$ = „erst $\mathcal{M}_f$, dann $\mathcal{M}$ auf dem Ergebnis“. $\mathcal{M}'$ akzeptiert A.
Sei $w \in A$. $\mathcal{M}_f(w)$ liefert $f(w)$ in höchstens $q(|w|)$ Schritten mit $|f(w)| \leq q(|w|) + |w|$.
$\mathcal{M}$ angesetzt auf $f(w)$ benötigt höchstens $p(|f(w)|) \leq p(q(|w|) + |w|)$ Schritte zum Akzeptieren.
Insgesamt gilt also $A \in \text{DTIME}(q(|w|) + |w| + p(q(|w|) + |w|) \subseteq P$. □

[42] Dieser Schritt ist nur nötig, damit das Resultat in dem von uns definierten Alphabet Σ_{AL} dargestellt werden kann. Alternativ hätten wir auch zu Beginn ein reichhaltigeres Alphabet wählen können.

Def. 8.10:

- Eine Sprache U heißt *NP-schwierig*, falls $\forall L \in NP$ gilt: $L \preceq_p U$.
- Eine Sprache U heißt *NP-vollständig*, falls U *NP*-schwierig ist und $U \in NP$ gilt. $\diamond$

TODO: Ausformulieren

- *NP*-schwierig: sehr starke Forderung, dass man alle(!) *NP*-Probleme darauf reduzieren kann
- zunächst unklar, ob es überhaupt ein *NP*-schwieriges Problem gibt
- bedeutet: wenn ich ein *NP*-vollst. Problem gefunden habe, das ich effizient Lösen kann, kann ich alle *NP*-Probleme effizient lösen (wie folgender Satz zeigt).

Satz 8.3: Wenn eine Sprache A *NP*-vollständig ist, dann gilt die folgende Äquivalenz.

$$A \in P \iff P = NP$$

Beweis:
„$\Longleftarrow$“ trivial.
„$\Longrightarrow$“ Es gilt $A \in P \subseteq NP$. Da A *NP*-vollständig ist, gilt $\forall L \in NP : L \preceq_p A$. Dann folgt mit Lemma 8.2 auch $L \in P$. $\square$

Lemma 8.4: $\preceq_p$ ist reflexiv und transitiv.

Beweis: Übungsblatt 14, Aufgabe 1. $\square$

Bem.: Aus der Transitivität folgt: Sobald ein *NP*-schwieriges Problem U bekannt ist, reicht es $U \preceq_p V$ zu zeigen, um zu beweisen, dass V ebenfalls *NP*-schwierig ist.

Satz 8.5 (Cook)**:** SAT ist *NP*-vollständig.

Wir werden nur für SAT die *NP*-Schwierigkeit direkt beweisen und für alle anderen *NP*-vollständigen Probleme die *NP*-Schwierigkeit wie in obiger Bemerkung angedeutet mit Hilfe einer polynomiellen Reduktion zeigen. Da der Beweis von Satz 8.5 sehr umfangreich ist, wollen wir diesen etwas aufschieben und zunächst die *NP*-Vollständigkeit weiterer Probleme zeigen.

Satz 8.6: 3SAT ist *NP*-vollständig.

Beweis:

- 3SAT $\in NP$

  Wir können dies auf zwei Arten zeigen. Entweder wir zeigen direkt, dass es eine NTM gibt, die 3SAT in polynomieller Zeit entscheidet, oder wir zeigen dies indirekt mit Hilfe einer polynomiellen Reduktion auf ein Problem in NP. Wir wählen letzteres Vorgehen, da zum Beweis nur nochmal erwähnt werden muss, dass SAT $\in NP$ und (offensichtlich) 3SAT $\preceq_p$ SAT gilt.

- 3SAT ist NP-schwierig

  Folgt aus Lemma 8.1. □

Wir gehen davon aus, dass die Leser des Skripts mit Graphen vertraut sind, machen aber zum Fixieren von Notation und Terminologie die folgende Definition.

Def. 8.11: Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $\mathcal{G} = (V, E)$, bei dem

- V eine Menge ist, deren Elemente wir *Knoten* nennen und
- $E \subseteq V \times V$ eine Menge von geordneten Paaren über V ist. Wir nennen diese geordneten Paare *Kanten*.

Ein *ungerichteter Graph* ist ein gerichteter Graph, bei dem E symmetrisch ist.[43] ◇

Def. 8.12 (CLIQUE)**:** Das Problem CLIQUE ist wie folgt definiert.

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Hat $\mathcal{G}$ eine k-Clique?
Eine k-Clique ist eine k-elementige Menge von Knoten, die paarweise durch Kanten verbunden sind, d.h., eine Menge $C \subseteq V$, sodass $|C| = k$ und $\forall u, v \in C : u \neq v \rightarrow (u, v) \in E$.

◇

Satz 8.7: CLIQUE ist NP-vollständig.

Bemerkung: Der folgende Beweis ist für ein Vorlesungsskript sehr knapp gehalten. Der Beweis enthält aber genau die Informationen, die wir in Übungsaufgaben und Klausur zum Erreichen der maximalen Punktzahl erwarten würde.

Beweise der NP-Vollständigkeit folgen typischerweise dem hier verwendeten Schema. Der schwierige (da Kreativität erfordernde) Teil ist dabei, eine geeignete Konstruktion für die

[43] Für die Zwecke dieser Vorlesung ist es komfortabel, den ungerichteten Graphen als Spezialfall des gerichteten Graphen zu definieren. Eine häufig verwendete Alternative ist, die Knotenmenge als Menge von zweielementigen Mengen zu definieren.

Reduktionsfunktion zu finden. Für den folgenden Beweis wird die Idee der Konstruktion in Abb. 20 mit Hilfe eines Beispiels illustriert.

In unseren Übungs- und Klausuraufgaben wird die Aufgabenstellung manchmal solch ein Beispiel enthalten. Damit soll ein Hinweis auf eine geeignete Konstruktion gegeben werden. Eine Besonderheit des folgenden Beweises ist, dass die Konstruktion aus zwei Schritten besteht (Erweiterung der Eingabeformel, Konstruktion des Graphen). Beide Schritte werden in Abb. 20 illustriert.

Beweis:

- Zeige CLIQUE $\in NP$.

  Verfahren: Wähle nichtdeterministisch eine k-elementige Knotenmenge C. Prüfe, ob C eine Clique ist. Dies ist in polynomieller Laufzeit möglich, da wir für jedes Knotenpaar höchstens einmal die Menge der Kanten durchlaufen müssen.

- Zeige, dass CLIQUE NP-schwierig ist (mit Hilfe der Reduktion 3SAT $\preceq_p$ CLIQUE).

  Ziel: Konstruiere für eine gegebene 3CNF-Formel F einen Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, sodass F genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{G}$ eine k-Clique hat.

  Unsere Konstruktion besteht aus zwei Schritten. Gegeben sei eine 3CNF-Formel F mit m Konjunkten.

  - Schritt 1.

    Erweitere F, sodass jeder Konjunkt aus genau drei Disjunkten besteht. Wähle hierfür eine Äquivalenzumformung, die einfach nur existierende Disjunkte wiederholt. Die resultierende Formel F' hat also die folgende Form.

    $F' = \bigwedge_{i=1}^{m} (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$, wobei $z_{i,j} \in \{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$

  - Schritt 2. Definiere zu einer Formel F mit m Konjunkten den Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ und k wie folgt:

    $$\begin{aligned} V &= \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq m, j \in \{1,2,3\}\} \\ E &= \{((i,j),(p,q)) \mid i \neq p, z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}\} \\ k &= m \end{aligned}$$

  Es gibt offensichtlich eine totale Reduktionsfunktion, welche diese Konstruktion in

polynomieller Zeit berechnet. Nun gilt:

F ist erfüllbar $\iff$ Es gibt eine Folge $z_{1,j_1}, \ldots, z_{m,j_m}$, sodass F unter der Belegung, die jedem Folgenglied 1 zuordnet, erfüllt ist.

$\iff$ Es gibt eine Folge $z_{1,j_1}, \ldots, z_{m,j_m}$, sodass in jedem Konjunkt ein z_{i,j_i} vorkommt und $\forall i \neq p : z_{i,j_i} \neq \neg z_{p,j_p}$ gilt.

$\iff$ $\mathcal{G}$ hat eine Menge von Knoten $\{(1, j_1), \ldots, (m, j_m)\}$, die paarweise durch Kanten verbunden sind.

$\iff$ $\mathcal{G}$ hat eine k-Clique für $k = m$.

Damit haben wir 3SAT $\preceq_p$ CLIQUE gezeigt. □

Die Formel

$$(X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg X) \wedge (X \vee Y)$$

ist in 3CNF. Die folgende Formel ist äquivalent und jeder Konjunkt besteht aus drei Disjunkten.

$$\underbrace{(X \vee \neg Y \vee \neg Y)}_{1} \wedge \underbrace{(Y \vee \neg X \vee \neg X)}_{2} \wedge \underbrace{(X \vee X \vee Y)}_{3}$$

Die Belegung β definiert durch $\beta(X) = 1, \beta(Y) = 1$ ist eine erfüllende Belegung für diese Formel, da z.B. der erste Disjunkt im ersten Konjunkt, der erste Disjunkt im zweiten Konjunkt und der dritte Disjunkt im dritten Konjunkt auf 1 gesetzt sind. Im folgenden Graphen bilden die Knoten $(1,1)$, $(2,1)$ und $(3,3)$ eine 3-Clique.

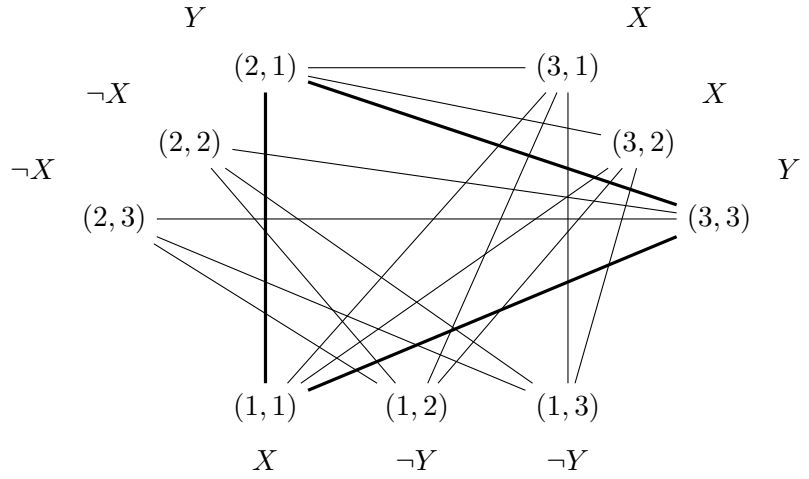


Abb. 20: Beispiel zu 3SAT $\preceq_p$ CLIQUE

An dieser Stelle wollen wir nun den Beweis von Satz 8.5 nachholen. Wir benötigen dafür

Vorlesung: 07.02.2018

zunächst das folgende Lemma.

Lemma 8.8: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Formel G, sodass $G(x_1, \ldots, x_k) = 1$ gdw. $\exists j : x_j = 1$ und $\forall i \neq j : x_i = 0$. Es gilt $|G| \in O(k^2)$.

Beweis:

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \bigvee_{i=1}^{k} x_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i \wedge x_j)$$

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$ akzeptiert L in NTIME(p), p Polynom. □

Beweis (von Satz 8.5):

1. SAT $\in NP$
   Rate nichtdeterministisch eine Belegung β. Werte anschließend $F[\beta]$ in polynomieller Zeit aus. (Siehe Bsp. 8.2)

2. SAT ist NP-schwierig.
   Zeige: $\forall L \in NP : L \preceq_p$ SAT
   Sei $L \in NP$, d.h., es gibt ein Polynom p und eine NTM $\mathcal{M}$ mit $L = L(\mathcal{M})$ mit Zeitkomplexität $p(n)$ für $n = |w|$.

   Sei $w = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$ eine beliebige Eingabe für $\mathcal{M}$ der Länge n.
   Ziel: Definiere F, sodass F erfüllbar $\iff$ $\mathcal{M}$ akzeptiert w.

   Seien Q die Zustandsmenge von $\mathcal{M}$ mit $\{q_1, \ldots, q_k\} = Q$ und Γ das Bandalphabet von $\mathcal{M}$ mit $\{a_1, \ldots, a_l\} = \Gamma$.
   Seien $t \in \{0, 1, \ldots, p(n)\}$, $i \in \{-p(n), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, p(n)\}$, $q \in Q$ und $a \in \Gamma$.
   Definiere damit folgende aussagenlogische Variablen zur Verwendung in F.

   - state$(t, q) = 1$ gdw. $\mathcal{M}$ nach t Schritten im Zustand q ist
   - pos$(t, i) = 1$ gdw. der Kopf von $\mathcal{M}$ nach t Schritten auf Position i steht.
   - tape$(t, i, a) = 1$ gdw. nach t Schritten an Position i ein a steht.

Wir setzen $F = R \wedge A \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge E$, wobei die Teilformeln folgendermaßen definiert sind.

1. Randbedingungen

$$\begin{aligned} R \;=\; & \bigwedge_t G(\text{state}(t, q_1), \ldots, \text{state}(t, q_k)) \\ & \wedge \bigwedge_t G(\text{pos}(t, -p(n)), \ldots, \text{pos}(t, 0), \ldots, \text{pos}(t, p(n))) \\ & \wedge \bigwedge_{t,i} G(\text{tape}(t, i, a_1), \ldots, \text{tape}(t, i, a_l)) \end{aligned}$$

2. Anfangskonfiguration

$$\begin{aligned} A \;=\;& \operatorname{state}(0, q_1) \wedge \operatorname{pos}(0, 1) \\ & \wedge \operatorname{tape}(0, 1, x_1) \wedge \cdots \wedge \operatorname{tape}(0, n, x_n) \\ & \wedge \bigwedge_{i<1 \vee i>n} \operatorname{tape}(0, i, \sqcup) \end{aligned}$$

3. Transitionsschritte

$$\begin{aligned} T_1 \;=\; & \bigwedge_{\substack{t<p(n),\\ i,q}} \operatorname{state}(t, q) \wedge \operatorname{pos}(t, i) \wedge \operatorname{tape}(t, i, a) \\ & \quad \rightarrow \bigvee_{1 \le m \le |\delta(q,a)|} \operatorname{state}(t+1, q'_m) \wedge \operatorname{pos}(t+1, i+d_m) \wedge \operatorname{tape}(t+1, i, a'_m) \\ & \quad \text{für jede Transition } (q'_m, a'_m, d_m) \in \delta(q, a) \text{ mit } d_m \in \{-1, 0, 1\} \\ T_2 \;=\; & \bigwedge_{\substack{t<p(n),\\ i,q}} \neg \operatorname{pos}(t, i) \wedge \operatorname{tape}(t, i, a) \rightarrow \operatorname{tape}(t+1, i, a) \end{aligned}$$

4. Endkonfiguration

$$E = \bigvee_{q \in F} \operatorname{state}(p(n), q)$$

$|F|$ ist polynomiell beschränkt in $|\mathcal{M}| + |w|$, also gilt $L \preceq_p \text{SAT}$.[44]
Es ist klar, dass gilt: F erfüllbar $\iff$ $\mathcal{M}$ akzeptiert w.
Damit haben wir „SAT ist *NP*-vollständig“ gezeigt. □

[44] $|\mathcal{M}|$ dürfen wir als zu L gehörende Konstante betrachten.

9 Einordnung von Sprachen in Chomsky-Hierarchie und Abschlusseigenschaften

Wir haben bereits gesehen, dass jede Laufzeitschranke auch eine Beschränkung der Platzkomplexität impliziert. Wir werden nun sehen, dass zumindest für haltende DTMs auch die umgekehrte Richtung gilt.

Lemma 9.1: Sei $\mathcal{M}$ eine TM mit Platzkomplexität $s(n)$. Dann durchläuft jede Berechnung höchstens $s(n) \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)}$ verschiedene Konfigurationen.

Beweis: Es gibt

- höchstens $s(n)$ mögliche Positionen, an denen sich der Kopf befinden kann,
- höchstens $|Q|$ mögliche Zustände und
- jede Zelle des besuchten Bands (davon gibt es höchstens $s(n)$ Stück) kann mit höchstens $|\Gamma|$ verschiedenen Zeichen beschriftet sein. □

Bemerkung: Für jede DTM mit Platzkomplexität $s(n)$ hält also jede Berechnung entweder

- nie oder
- nach höchstens $s(n) \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)}$ Schritten.

Grund: Der zweite Fall folgt aus Lemma 9.1. Ansonsten wird eine Konfiguration zweimal erreicht und die DTM ist in einer „Endlosschleife“.

Satz 9.2: Jede Sprache $L \in \mathrm{NSPACE}(n)$ ist entscheidbar.

Beweis: Wegen Lemma 9.1 genügt es, jede Berechnung bis zu $s(n) \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)}$ Schritten zu simulieren, um herauszufinden, ob ein Wort der Länge n akzeptiert wird. □

Satz 9.3: Jede Sprache $L \in \mathrm{CH1}$ ist entscheidbar.

Beweis: Seien $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ eine Typ-1-Grammatik (kontextsensitive Grammatik) für L, $w \in \Sigma^*$ und n die Länge von w. Da alle Regeln expansiv (d.h., $\alpha \to \beta \in P \Longrightarrow |\alpha| \leq |\beta|$) sind, müssen wir nicht alle (unendlich viele!) Ableitungen betrachten. Es genügt, wenn wir Ableitungen

$$S \vdash \alpha_1 \vdash \ldots \vdash \alpha_m,$$

betrachten, bei denen alle Satzformen α_j höchstens Länge n haben (also $|\alpha_j| \leq n$) und paarweise verschieden sind. □

Satz 9.4: $\mathrm{CH1} = \mathrm{NSPACE}(n)$

Beweis:

„⇒“: Gegeben: Typ-1-Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$
Gesucht: NTM $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$
Wähle das Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup N \cup \{\sqcup\}$ und folgendes Verhalten:

1. $\mathcal{M}$ rät nichtdeterministisch eine Position auf dem Band und eine Produktion $\alpha \to \beta$. Falls β gefunden wird, ersetze durch α, weiter bei 1.
2. Falls der Bandinhalt nur noch S ist, so hält $\mathcal{M}$ und akzeptiert.

Dieses Verfahren terminiert.

„⇐“: Gegeben: NTM $\mathcal{M}$
Gesucht: Typ-1-Grammatik $\mathcal{G}$ mit $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{M})$
Wir wollen den Beweis hier nicht formal ausformulieren und beschreiben nur die zugrundeliegenden Ideen.

– Idee 1: Ahme die Berechnungsschritte von $\mathcal{M}$ mit Ableitungsschritten der Grammatik nach. Die manipulierten Satzformen repräsentieren dabei die Konfigurationen von $\mathcal{M}$. Wir wählen als (vorläufige) Variablenmenge $N' = \Gamma \cup (Q \times \Gamma)$. Eine Konfiguration $uqav$ mit $u, v \in \Gamma^*, a \in \Gamma$ wird durch die Satzform $u(q, a)v$ repräsentiert. Die Regeln sind wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} P' = \quad & \{(q,a) \to (q',a') \mid (q',a',N) \in \delta(q,a)\} \\ & \cup \{(q,a)b \to a'(q',b) \mid b \in \Gamma, (q',a',R) \in \delta(q,a)\} \\ & \cup \{(q,a) \to (q',a') \mid (q',a',L) \in \delta(q,a)\} \end{aligned}$$

Somit gilt $uqav \vdash^* u'q'a'v'$, also dass $\mathcal{M}$ eine Konfiguration in eine andere überführen kann, genau dann, wenn wir mit Regeln aus P' die Ableitung $u(q,a)v \vdash_{\mathcal{G}}^* u'(q',a')v'$ machen können.

– Idee 2: Die erste Idee hat noch das folgende Problem und muss deshalb ergänzt werden: Während eine TM mit der Eingabe startet und diese in eine Antwort der Form „akzeptiert“/„akzeptiert nicht“ transformiert, arbeitet eine Grammatik umgekehrt. Sie startet mit dem Startsymbol und am Ende erhalten wir das resultierende Wort.

Wir unterteilen die Satzformen der Grammatik in zwei Spuren, eine obere Spur und eine untere Spur. Die untere Spur enthält das Eingabewort, die obere Spur simuliert das Band der TM. Formal erreichen wir dies, indem wir als Variablenmenge das kartesische Produkt aus vorläufiger Variablenmenge und Alphabet nehmen: $N = \{S\} \dot\cup N' \times \Sigma$

$$a_1 \cdots a_n \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (q,a) \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Spur 1} \\ \text{Spur 2} \end{matrix}$$

Eine Ableitung besteht dann aus drei Phasen.

* Phase 1: Wir wählen nichtdeterministisch das Wort, das wir erzeugen wollen (untere Spur), und bringen das Band der TM (obere Spur) in die entsprechende Startkonfiguration.

  Entsprechende Regeln:

$$S \to \begin{pmatrix} (q_0,a) \\ a \end{pmatrix} \qquad \forall a \in \Sigma$$

$$S \to S \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \qquad \forall a \in \Sigma$$

* Phase 2: Wir simulieren auf der oberen Spur die Berechnungen der TM, bis eine Haltekonfiguration erreicht ist.

  Entsprechende Regeln:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta \\ a \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \forall \alpha \to \beta \in P' \\ \alpha, \beta \in \triangle \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \forall \alpha_1\alpha_2 \to \beta_1\beta_2 \in P' \\ \alpha_i, \beta_i \in \triangle \end{matrix}$$

* Phase 3: Wenn die TM in einem akzeptierenden Zustand ist, ersetzen wir alle „Zweispurzeichen“ durch das entsprechende Zeichen der unteren Spur und erhalten das Eingabewort.

  Entsprechende Regeln:

$$\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \to a \qquad \begin{matrix} x \in \Gamma \\ a \in \Sigma \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} (q',x) \\ a \end{pmatrix} \to a \qquad \begin{matrix} x \in \Gamma, q' \in F, \delta(q',x) = \emptyset \\ a \in \Sigma \end{matrix}$$

□

Satz 9.5: Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist verschieden von CH1.

Vorlesung: 09.02.2018

Beweis: Wir konstruieren zunächst analog zu Abschnitt 6.5.1 eine Codierung von Grammatiken durch Wörter $w \in \{0,1\}^*$. Anschließend definieren wir $\mathcal{G}_w$ als die Grammatik, die durch Wort w codiert wird. Dabei wählen wir die Grammatik $(\{S\}, \{0,1\}, \{\}, S)$ für den Fall, dass w nicht Code einer Grammatik ist.[45]

Wir betrachten nun eine Matrix, in deren Spalten alle Wörter $w_1, w_2, \ldots$ und in deren Zeilen alle Grammatiken $\mathcal{G}_{w_1}, \mathcal{G}_{w_2}, \ldots$ aufgelistet sind. Ein Matrixeintrag $(\mathcal{G}_{w_i}, w_j)$ enthält ein Y, falls $w_j \in L(\mathcal{G}_{w_i})$, und sonst ein N.

Da das Wortproblem für CH1-Sprachen entscheidbar ist, ist insbesondere der Test „$w_i \in L(\mathcal{G}_{w_i})$“ für alle Diagonaleinträge berechenbar und somit auch die Sprache $L_{\mathsf{evil}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \notin L(\mathcal{G}_w)\}$ entscheidbar.

Angenommen, jede entscheidbare Sprache sei CH1. Dann gibt es auch ein w_k, sodass $L(\mathcal{G}_{w_k}) = L_{\mathsf{evil}}$. Nun gilt aber $w_k \in L_{\mathsf{evil}} \iff w_k \notin L_{\mathsf{evil}}$. Widerspruch! □

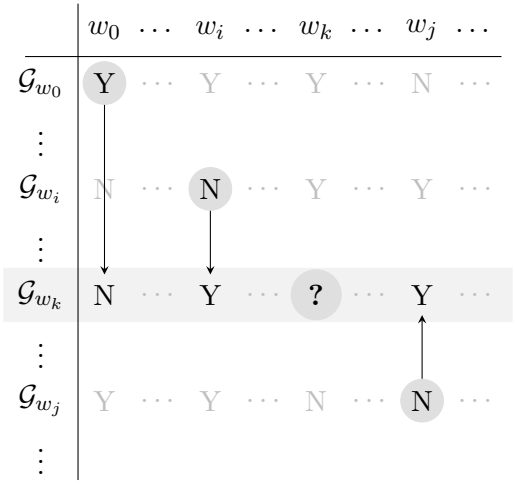


Abb. 21: Illustration des Diagonalarguments beim Beweis, dass nicht jede entscheidbare Sprache CH1 ist

Satz 9.6: Die Typ-1-Sprachen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $\cdot$, * und Komplement.

Beweis:

- „$\cup$“ und „$\cap$“: Betrachte eine NTM. Seien L_1 und L_2 zwei Typ-1-Sprachen und $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zwei zugehörige NTMs.
  - Verwende als Bandalphabet 2-Tupel, um eine 2-Spur-TM zu simulieren.
  - Verwende die untere Spur für eine „Sicherungskopie“ der Eingabe.

[45] Diese Wahl ist wie bei der Definition von $\mathcal{M}_w$ willkürlich.

  - Simuliere auf der oberen Spur $\mathcal{M}_1$ und speichere das Ergebnis im Zustand.
  - Simuliere auf der unteren Spur $\mathcal{M}_2$ und werte das Gesamtergebnis aus.
- „$\cdot$“ und „*“:

  Konstruiere eine Typ-1-Grammatik analog zu Satz 5.5.
- Komplement:

  „2. LBA-Problem[46]“ bis 1987, dann gelöst durch Immerman und Szelepcsényi. □

Bemerkung: „1. LBA-Problem (1964)“: Ist NTAPE(n) = DTAPE(n)? Bisher ungelöst.

Satz 9.7: CH0 ist die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen.

Beweis: “$\Rightarrow$“ Verwende die Konstruktion einer NTM $\mathcal{M}$ wie in Satz 9.4, aber ohne Platzbeschränkung.

“$\Leftarrow$“ Konstruktion analog zu Satz 9.4 + Startsymbol S'

$$S' \to \begin{pmatrix} \sqcup \\ \varepsilon \end{pmatrix} S' \begin{pmatrix} \sqcup \\ \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \text{Schaffe Platz für Berechnung von } \mathcal{M}$$

$$S' \to S$$

Erweitere N

$$= \{S', S\} \cup \triangle \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$$

Neue Löschregeln:

$$\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix} \to \varepsilon \qquad \forall x \in \Gamma$$

↼ die einzigen Regeln, die Typ-1-Bedingung verletzen. □

Satz 9.8: Die entscheidbaren Sprachen sind eine echte Teilmenge von CH0.

Beweis:

- „$\subseteq$“: Folgt trivialerweise aus Def. 7.7, Def. 6.4 und Def. 7.4.
- „$\neq$“: Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (Satz 7.8), aber semi-entscheidbar (Lemma 7.10). □

Satz 9.9: CH0 $\neq \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Beweis: Nach Korollar 7.12 ist $\overline{K}$ nicht semi-entscheidbar. □

[46] LBA = Linear Bounded Automaton – 1964 Kuroda

Satz 9.10: Die Typ-0 Sprachen sind unter $\cup$, $\cap$, $\cdot$, * abgeschlossen, sind aber nicht unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis:

- „$\cup$“ und „$\cap$“:

  Siehe Satz 7.23.

- „$\cdot$“ und „*“:

  Konstruiere Grammatik analog zu Satz 5.5.

- Komplement:

  Das spezielle Halteproblem K ist semi-entscheidbar (Lemma 7.10), aber sein Komplement $\overline{K}$ ist nicht semi-entscheidbar (Korollar 7.12). □

Liste der Definitionen

Liste der Sätze

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

3SAT Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik in 3CNF

AL Aussagenlogik

CFL Menge der kontextfreien Sprachen

CFG kontextfreie Grammatik

CNF Chomsky-Normalform

CP Korrespondenzproblem

CYK Cocke, Younger, Kasami

DAG gerichteter azyklischer Graph

DCFG deterministische CFG

DCFL deterministische CFL

DEA deterministischer endlicher Automat

DFA engl.: deterministic finite automaton

DPDA deterministischer Kellerautomat

DTM deterministische TM

EA endlicher Automat

LBA Linear Bounded Automaton

MPCP Das modifizierte PCP

ND Nicht-Determinismus

NEA nichtdeterministischer endlicher Automat

NFA engl.: nondeterministic finite automaton

NP Klasse der nichtdeterministisch polynomiell berechenbaren Sprachen

NPDA nichtdeterministischer Kellerautomat

NT Nichtterminal

NTM nichtdeterministische TM

P Klasse der deterministisch polynomiell berechenbaren Sprachen

PCP Das Postsche Korrespondenzproblem

PDA pushdown automaton (Kellerautomat)

PL Pumping Lemma

RE Menge der regulären Ausdrücke

REG Menge der regulären Sprachen

RM Registermaschine

SAT Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik

TM Turingmaschine

TT Turingtabelle

Anmerkungsverzeichnis