Name: ________________________________ Matrikel-Nr.: __________________

Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

23.12.2018

Zwischenklausur zur Vorlesung
Theoretische Informatik
WS 2018/2019

Diese Zwischenklausur wird weder korrigiert noch mit Übungspunkten bewertet. Dieses Dokument orientiert sich in Schwierigkeit der Aufgaben und Layout an Haupt- und Nachklausur. Haupt- und Nachklausur werden allerdings jeweils 120 Minuten dauern. Einziges zugelassenes Hilfsmittel in Haupt- und Nachklausur ist ein DIN A4-Zettel (beidseitig) mit beliebigem handschriftlichen Inhalt zugelassen.

Auch wenn es keine offizielle Korrektur dieser Zwischenklausur gibt können Sie uns bis einschließlich 11.01.2019 Ihre Lösungen via E-Mail an `heizmann@informatik.uni-freiburg.de` oder durch Abgabe in der Vorlesung zukommen lassen.
Wir werden mindestens zehn Lösungen korrigieren (möglicherweise nicht mehr!) und die korrigierten Lösungen in der Ilias Lernplattform für alle Vorlesungsteilnehmer zugänglich machen. Geben Sie also nur dann eine Lösung ab wenn Sie mit dieser Veröffentlichung einverstanden sind. Sie dürfen selbstverständlich Ihre Lösung in anonymisierter Form abgeben oder Ihren Namen nur auf das Deckblatt schreiben.
Haben Sie keine Hemmungen eine schlechte Lösung abzugeben! Sie erhalten ein realistisches Resultat nur wenn Sie diese Zwischenklausur unter Klausurbedingungen in der angegebenen Zeit bearbeiten und die so erzielte Lösung abgeben.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ________________

Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

23.12.2018

Zwischenklausur zur Vorlesung Theoretische Informatik

WS 2018/2019

Die Klausur besteht aus diesem Deckblatt und vier Aufgabenblättern. Falls Sie eine Aufgabe nicht auf dem entsprechenden Blatt bearbeiten, machen Sie das bitte deutlich kenntlich. Auf Anfrage erhalten Sie zusätzliches Papier. Tragen Sie auf jedem Blatt bitte Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Abgesehen von einem beschriebenen DIN A4-Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen. Zur Bearbeitung haben Sie 40 Minuten Zeit. Insgesamt können 40 Punkte erzielt werden.

Nicht lesbare Lösungen/Lösungsversuche werden nicht gewertet. Falls Sie eine Aufgabe mehrmals bearbeiten, machen Sie bitte kenntlich, welche Lösung bewertet werden soll.

1. Reguläre Sprachen	von 11
2. Determinisierung	von 8
3. Pumping Lemma	von 10
4. Kontextfreie Sprachen	von 11
Summe	von 40

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: __________________

1. Aufgabe (Reguläre Sprachen) $\boxed{11}$

Betrachten Sie die folgende reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{die Anzahl der } a \text{ ist gerade und auf jedes zweite } a \text{ folgt sofort mindestens ein } b\}$

(a) Geben Sie zwei verschiedene Wörter der Länge vier an, die in L liegen. $\boxed{2}$

(b) Geben Sie zwei verschiedene Wörter der Länge vier an, die nicht in L liegen. $\boxed{2}$

(c) Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA) $\mathcal{N}$ an, der L akzeptiert. Es genügt, wenn sie das Zustandsdiagramm von $\mathcal{N}$ angeben. $\boxed{4}$

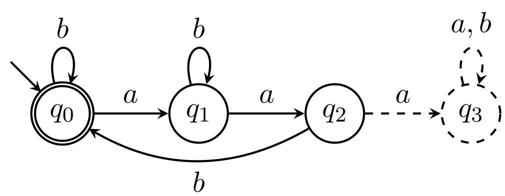
(d) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der L beschreibt. $\boxed{3}$

.... Lösung ....

(a) $aabb, abab, baab, bbbb$

(b) $aaaa, aaab, aaba, abaa, abba, abbb, baaa, baba, babb, bbaa, bbab, bbba$

(c) Der Nichtdeterminismus hilft hier gar nicht. Mit dem NEA sparen wir nur den gestrichelten Sackgassenzustand.



(d) $(b^*ab^*ab)^*b^* \equiv (ab^*ab + b)^*$

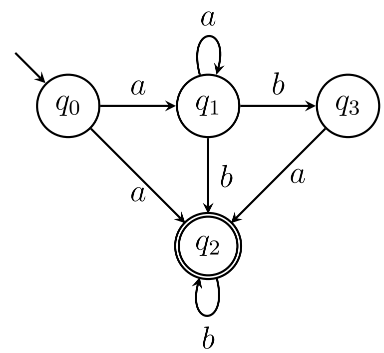
Kommentare:

- Die natürlichen Zahlen sind in der Informatik mit 0 definiert. Die 0 ist eine gerade Zahl.
- Bei regulären Ausdrücken werden oft Randfälle wie ε vergessen.
- Das Vorgehen, sich nur den NEA oder regulären Ausdruck zu überlegen und für die jeweils andere Aufgabe die entsprechende Konstruktion aus der Vorlesung zu verwenden, empfiehlt sich hier aus Zeitgründen *nicht*.
- Es bietet sich an, einen Automaten/regulären Ausdruck/(Grammatik/Turingmaschine) an Beispielen zu testen. In dieser Aufgabe konnte man die Wörter von oben verwenden.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ____________________

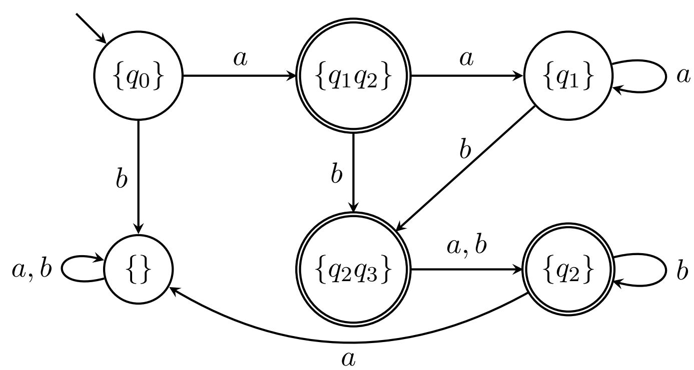
2. Aufgabe (Determinisierung) **8**

Betrachten Sie den folgenden NEA $\mathcal{N}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



Konstruieren Sie einen DEA $\mathcal{A}$, welcher die Sprache $L(\mathcal{N})$ erkennt.
Es genügt, wenn Sie das Zustandsdiagramm von $\mathcal{A}$ angeben. Dabei müssen Sie nur die erreichbaren Zustände angeben.

.... Lösung ....



Kommentare:

- typische Fehler: Startzustand/finale Zustände vergessen; keine totale Transitionsfunktion angegeben
- Es empfiehlt sich hier, die Konstruktion aus der Vorlesung anzuwenden.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ________________

3. Aufgabe (Pumping Lemma) **10**

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht regulär ist.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = k \text{ und } i, j, k \in \mathbb{N}\}$$

.... Lösung ....

Der blaue Text soll beim Verständnis des Beweises helfen, der schwarze Text alleine würde aber gerade so ausreichen um die volle Punktzahl zu erhalten. Im Falle eines falschen Beweises kann ein ausführlichererer Text den Korrigierenden helfen das geschriebene zu verstehen und Ihnen zu Teilpunkten verhelfen.

Das Pumping Lemma ist eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$. Wir verwenden hier die Kontraposition, das bedeutet wir beweisen $\neg B$ und folgern $\neg A$

Wir müssen eine Eigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$ mit ≥ 1 beweisen.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit ≥ 1.
Diese Eigenschaft beinhaltet die Existenz eines Wortes z mit $|z| \geq n$. Wir dürfen also ein entsprechendes Wort beliebig wählen. Allerdings müssen wir für jedes n ein solches Wort wählen. Es bietet sich an, z abhängig von n zu wählen. Dies ist der wesentliche kreative Akt des gesamten Beweises. Eine schlechte Wahl von z macht den Beweis unmöglich, eine mittelmäßige Wahl von z macht den Beweis schwierig, eine gute Wahl von z macht den Beweis einfach.
Wähle $z = a^n c^n \in L$.
Erwähne kurz, dass z die nötigen Eigenschaften hat.
Offensichtlich gilt $|z| = 2n \geq n$.
Weiter müssen wir zeigen dass es keine Zerlegung von z gibt die drei bestimmte Eigenschaften erfüllt. Wir betrachten nun eine beliebige Zerlegung die die ersten beiden Eigenschaften erfüllt und zeigen später dass diese die dritte Eigenschaft verletzt.
Sei $z = uvw$ mit $u, v, w \in \Sigma^*$ eine beliebige Zerlegung für die $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt.
Somit gilt $v \in L(a^+)$. Das Wort v besteht also nur aus a's aber aus mindestens einem a.
Weil wir z so clever gewählt haben bleibt uns nun eine Fallunterscheidung erspart. Bzw. die Fälle $v = a$, $v = aa$, ... können alle mit der gleichen Argumentation abgehandelt werden.
Wir wenden uns nun der dritten Eigenschaft der Zerlegung, $\forall i \in \mathbb{N} uv^i w \in L$ zu. Da wir die Negation der Aussage betrachten düfen wir einen Wert für i wählen.
Wähle $i = 0$ und betrachte $z' := uv^i w$. Es gilt $z' = a^{n-|v|} c^n$ und somit $z' \notin L$
Mit Hilfe des Pumping Lemma schließen wir, dass L nicht regulär ist. □

Kommentare:

- Man muss klar die Struktur eines Beweises beschreiben. Insbesondere: Was sind Annahmen, was sind Folgerungen? Beispiele:
  „Sei z ein beliebiges Wort der Form ...“
  „Daraus folgt, dass u von der Form a^j für ein $j \in \mathbb{N}$ ist.“

- Immer wenn man eine neue Variable einführt, muss man beschreiben, was ihre Bedeutung ist. Oft hilft es auch den Typ anzugeben. Beispiele:
  „Sei $n \in \mathbb{N}$ die Konstante aus dem Pumping Lemma.“
  „Sei z ein beliebiges Wort der Form ...“

Name: ________________________________ Matrikel-Nr.: __________________

- Neue Variablen sollte man nur einführen, wenn sie nicht identisch zu alten Variablen sind.
- Das Pumping Lemma nochmal hinzuschreiben gibt keine Punkte und ist Zeitverschwendung. Es gab mehrere Klausuren, in denen das Pumping Lemma falsch hingeschrieben wurde. Wir fragen uns wie das passieren konnte. Wir vermuteten, dass fast jeder das Pumping Lemma auf seinen Zettel, der zur Klausur mitgebracht werden darf, schreiben würde.
- Man muss z und i wählen, aber n und u, v, w (bis auf die oben genannten Einschränkungen) beliebig lassen.
- Bei Fallunterscheidungen muss man kurz begründen, warum alle Fälle abgedeckt wurden, sofern dies nicht offensichtlich ist.
- Fallunterscheidungen, bei denen angegebene Fälle nicht auftreten können, sind nur akzeptabel, wenn dies dazugeschrieben wird. Beispiele:
  „Der Fall $x < 0$ ist nicht möglich, da $x \in \mathbb{N}$" – völlig legitim
  „Der Fall $x < 0$ ..." und dann ein langer Beweis – Punktabzug
- Die Aussage „das Pumping Lemma gilt für ein Wort" ist nicht sinnvoll. Ein Lemma ist (wie ein Satz) eine Formel, die äquivalent zu `true` ist. Es gibt darin keine freien Variablen.

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ____________________

4. Aufgabe (Kontextfreie Sprachen) **11**

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, Nichtterminalsymbolen $N = \{S, X\}$ und den folgenden Produktionen.

$$P = \{ \quad \begin{array}{l} S \to SbX \mid c, \\ X \to aX \mid c \quad \} \end{array}$$

Sei $w = cbaac$.

(a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort w an. 3

(b) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort w an. 3

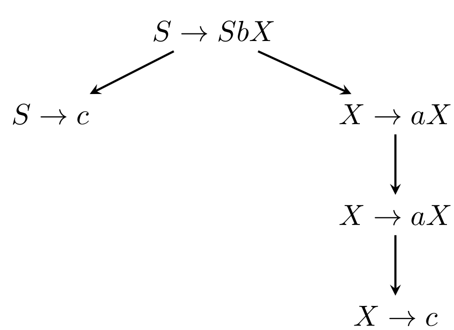
(c) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache $L(\mathcal{G})$ akzeptiert. 5
Es genügt, ein Zustandsdiagramm, das Kelleralphabet Γ und das Kellerbodensymbol Z^{init} anzugeben.

Hinweis: Es ist hilfreich $Z^{\text{init}} = S$ zu wählen.

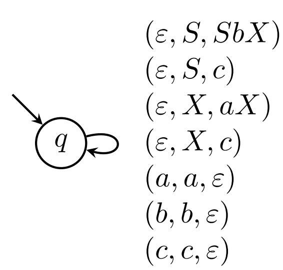
.... Lösung ....

(a) $S \vdash SbX \vdash cbX \vdash cbaX \vdash cbaaX \vdash cbaac$

(b)



(c) $\Gamma = \{S, X, a, b, c\}, Z^{\text{init}} = S$



Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: __________________

Kommentare:

- Wir möchten, dass die Notation aus der Vorlesung verwendet wird. Dies soll helfen, Missverständnisse beim Interpretieren der Lösung zu verringern. Für andere Notationen kann es Punktabzug geben.

  Wir möchten nicht, dass Sie (viel) Zeit in das Auswendiglernen der Notation investieren. Sie sollten den Zettel, der zur Klausur mitgebracht werden darf, als Erinnerungshilfe für die richtige Notation nutzen.

- Zur Konstruktion des PDA empfiehlt sich der Algorithmus aus der Vorlesung.