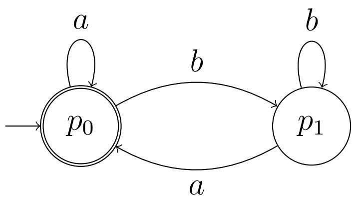
Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

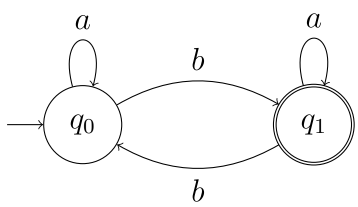
Abgabe: 31. Oktober 2018

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Aufgabe 1: Produktkonstruktion 2 Punkte

Betrachten Sie die folgenden beiden DEAs über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.





Konstruieren Sie zu diesen DEAs den Produktautomaten für Schnitt.

Tipp: Testen Sie zum Schluss mit Hilfe einiger Wörter ob Sie einen Fehler in Ihrer Konstruktion finden.

Aufgabe 2: Produktautomat für Vereinigung 2 Punkte

Seien $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_1^{\mathsf{init}}, F_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_2^{\mathsf{init}}, F_2)$ zwei DEAs. Anlog dem Produktautomaten für Schnitt aus der Vorlesung, definieren wir den *Produktautomaten für Vereinigung* $A_\cup = (\Sigma, Q_\cup, \delta_\cup, q_\cup^{\mathsf{init}}, F_\cup)$ mit den folgenden Komponenten.

$$\begin{aligned}
Q_\cup &= Q_1 \times Q_2 \\
\delta_\cup((q_1, q_2), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) && \text{für alle } a \in \Sigma \\
q_\cup^{\mathsf{init}} &= (q_1^{\mathsf{init}}, q_2^{\mathsf{init}}) \\
F_\cup &= (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)
\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $A_\cup$ genau die Vereinigung der Sprachen von A_1 und A_2 akzeptiert, also dass $L(A_\cup) = L(A_1) \cup L(A_2)$ gilt.

Hinweis: Der Beweis kann analog zum Beweis von Satz 2.1 aus dem Vorlesugsskript geführt werden. Wir bitten Sie deshalb darum *nicht* den gesamten Beweis aufzuschreiben. Auf der letzten Seite dieses Dokumentes finden Sie den Beweis von Satz 2.1. Modifizieren Sie diesen so dass er als Beweis für diese Aufgabe geeignet ist. Insgesamt sind nur sehr wenige Modifikationen nötig. Kennzeichnen Sie Ihre Modifikationen deutlich indem Sie einen farbigen (nicht roten) Stift verwenden.

Aufgabe 3: Rechtskongruenz I 3 Punkte

Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $R_\mathcal{A}$ über beliebigem Alphabet Σ (s. Skript Bsp. 2.8):

$$R_\mathcal{A} = \{(u, v) \mid \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, v)\} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

Zeigen Sie, dass $R_\mathcal{A}$ rechtskongruent ist.

Hinweis: Sie dürfen die folgende Aussage ohne Beweis verwenden.
Für einen beliebigen DEA $(\Sigma, Q, \delta, q^{\text{init}}, F)$ gilt für alle $q \in Q$ und alle $u, v \in \Sigma^*$:

$$\tilde{\delta}(q, u \cdot v) = \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(q, u), v).$$

Aufgabe 4: Rechtskongruenz II 3 Punkte

Betrachten Sie die folgende Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ über $\Sigma = \{a, b\}$:

$$R = \{(u, v) \mid u \text{ enthält höchstens fünf } a \text{ genau dann, wenn } v \text{ höchstens fünf } a \text{ enthält}\}$$

(a) Ist R eine Äquivalenzrelation?

(b) Ist R rechtskongruent?

Begründen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 5: Markierungsalgorithmus 4 Punkte

Der folgende Algorithmus dient dazu einen DEA zu verkleinern ohne dessen Sprache zu ändern.

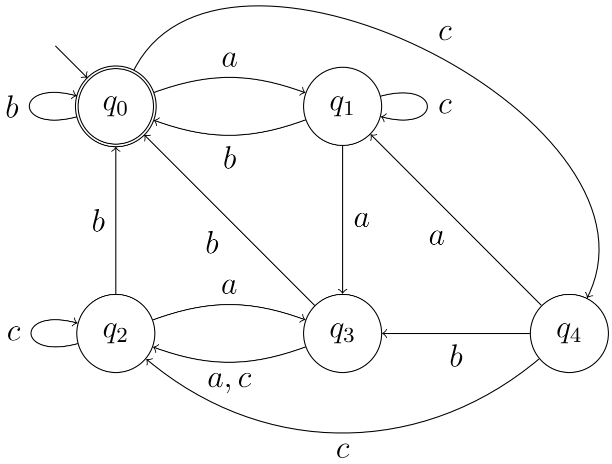
Markierungsalgorithmus

Eingabe: DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Ausgabe: Minimaler DEA für die Sprache $L(\mathcal{A})$.

1. Eliminiere in $\mathcal{A}$ alle nicht-erreichbaren Zustände.
2. Erstelle eine Tabelle, in der es für jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$ mit $q \neq q'$ ein Feld gibt.
3. Markiere jedes Zustandspaar $\{q, q'\}$, für das $q \in F$ und $q' \notin F$ gilt.
4. Betrachte für jedes unmarkierte Zustandspaar $\{q, q'\}$ und jedes Symbol des Alphabets a das Zustandspaar $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$. Ist $\{\delta(q, a), \delta(q', a)\}$ markiert, so markiere auch $\{q, q'\}$.
5. Wiederhole Schritt 4 so lange, bis es in der Tabelle keine Änderungen mehr gibt.
6. Fasse alle Zustände zusammen, deren Zustandspaare nicht markiert sind.

Wenden Sie den Markierungsalgorithmus auf den folgenden DEA über $\Sigma = \{a, b, c\}$ an. Geben Sie zusätzlich zum Ergebnisautomaten auch die verwendete Markierungstabelle an.



Hinweis: Da die Ordnung der Paare keine Rolle spielt, können Sie eine Hälfte der Tabelle ignorieren.

Beweis von Satz 2.1

(Damit die Unterschiede zwischen den Beweisen für Schnitt und Vereinigung möglichst gering sind verwenden wir für den Produktautomaten hier nicht $A_\cap$ sondern A_P)

Seien $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_1^{\text{init}}, F_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_2^{\text{init}}, F_2)$ zwei DEAs und $A_P = (\Sigma, Q_P, \delta_P, q_P^{\text{init}}, F_P)$ der zugehörige Produktautomat für Schnitt. Wir zeigen zunächst via Induktion über die Länge von w, dass für alle $w \in \Sigma^*$, für alle $q_1 \in Q_1$ und für alle $q_2 \in Q_2$ die folgende Gleichung gilt.

$$\tilde{\delta}_P((q_1, q_2), w) = (\tilde{\delta}_1(q_1, w), \tilde{\delta}_2(q_2, w))$$

Der Induktionsanfang für $n = 0$ folgt dabei direkt aus Def 2.2, da ε das einzige Wort der Länge 0 ist.

$$\tilde{\delta}_P((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$$

Den Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$ zeigen wir mit Hilfe der folgenden Umformungen, wobei $a \in \Sigma$ ein beliebiges Zeichen und $w \in \Sigma^n$ ein beliebiges Wort der Länge n ist.

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_P((q_1, q_2), aw) &\overset{\text{Def 2.2}}{=} \tilde{\delta}_P(\delta_P((q_1, q_2), a), w) \\
&\overset{\text{Def. } \delta_P}{=} \tilde{\delta}_P\big((\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\big), w) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \big(\tilde{\delta}_1(\delta_1(q_1, a), w), \tilde{\delta}_2(\delta_2(q_2, a), w)\big) \\
&\overset{\text{Def 2.2}}{=} \big(\tilde{\delta}_1(q_1, aw), \tilde{\delta}_2(q_2, aw)\big)
\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir $L(A_P) = L(A_1) \cap L(A_2)$ mit Hilfe der folgenden Umformungen für ein beliebiges $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned}
w \in L(A_P) &\overset{\text{Def 2.3}}{\text{gdw}} \tilde{\delta}_P(q_P^{\text{init}}, w) \in F_P \\
&\overset{\text{Def. } q_P^{\text{init}}}{\text{gdw}} \tilde{\delta}_P((q_1^{\text{init}}, q_2^{\text{init}}), w) \in F_P \\
&\text{gdw} \quad (\tilde{\delta}_1(q_1^{\text{init}}, w), \tilde{\delta}_2(q_2^{\text{init}}, w)) \in F_P \\
&\overset{\text{Def. } F_P}{\text{gdw}} \tilde{\delta}_1(q_1^{\text{init}}, w) \in F_1 \text{ und } \tilde{\delta}_2(q_2^{\text{init}}, w) \in F_2 \\
&\overset{\text{Def. 2.3}}{\text{gdw}} w \in L(A_1) \text{ und } w \in L(A_2)
\end{aligned}$$