Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 14. November 2018

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Aufgabe 1: Pumping Lemma I 3 Punkte

Das Pumping Lemma hat die Form einer Implikation $A \Rightarrow B$. Wir verwenden typischerweise die Kontraposition, also die äquivalente Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ und zeigen dass eine Sprache nicht regulär ist. Dabei ist B ist eine Aussage mit Quantoren. In dieser Aufgabe üben wir den Umgang mit Aussagen, die sowohl negiert sind, als auch Quantoren enthalten.

(a) Betrachten Sie die Sprache $L = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und das Wort $z = abab \in L$. Wir zerlegen das Wort z in drei Teile u, v und w wie folgt: $u = ab$, $v = a$ und $w = b$. Widerlegen Sie folgende Aussage.

$$\text{Für alle } i \in \mathbb{N} \text{ gilt } uv^i w \in L.$$

Gehen Sie dazu in zwei Schritten vor.

(i) Negieren Sie die Aussage. Wählen Sie dabei eine Formulierung, bei der Negationen immer nur innerhalb und niemals vor einer quantifizierten Teilaussage vorkommt.[1]

(ii) Zeigen Sie, dass Ihre negierte Aussage gilt.

(b) Formulieren Sie das Pumping Lemma in der Form $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wählen Sie dabei wieder eine Formulierung bei der negierte Teilaussagen niemals Quantoren enthalten. (Ziehen Sie also Negationen soweit wie möglich nach innen.)

Hinweis: Wenn wir Logiksymbole statt natürlicher Sprache verwenden, können wir die Aussage des Pumping Lemma für alle Sprachen L wie folgt formulieren.

$$\begin{aligned} L \text{ ist regulär} \quad \Rightarrow \quad (&\exists n \in \mathbb{N}.\ n > 0 \\ &\quad \wedge \forall z \in L.\ |z| \geq n \\ &\qquad \Rightarrow \exists u, v, w \in \Sigma^*.\ z = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \\ &\qquad\quad \wedge \forall i \in \mathbb{N}.\ uv^i w \in L) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Pumping Lemma II 4 Punkte

Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass die folgende Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

$$L = \{a^m b^n \mid m < n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

[1] Umgangssprachlich bezeichnet man die dafür nötige Umformung als “die Negation nach innen ziehen” und die Korrektheit dieser Umformung ist durch die folgende Äquivalenz von logischen Formeln gerechtfertigt. $\neg\forall x \in X.\varphi(x) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in X.\neg\varphi(x)$

Aufgabe 3: ε-NEA 2 Punkte

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie einen ε-NEA an, der die Sprache

$$\{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = 2 \text{ oder } \#_b(w) = 3\}$$

akzeptiert. Hierbei bezeichnet $\#_z(w)$ für alle $z \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ die Anzahl der Zeichen z, die in w vorkommen.

Aufgabe 4: Beweis zur ε-Eliminierung 2 Punkte

Satz 2.8 aus dem Vorlesungsskript besagt, dass es zu jedem ε-NEA einen NEA gibt, der die gleiche Sprache akzeptiert. Im Beweis dieses Satzes werden wir die folgende Aussage verwenden.

$$\begin{aligned}&\forall w \in \Sigma^+ \; \forall q, q' \in Q : \\ &\qquad (q, w, q') \in \mathsf{reach}_{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; \exists \underbrace{q_0, q_1, \ldots, q_n}_{\text{Lauf von } \mathcal{N}} \in Q, \text{ sodass } n = |w|, q_0 = q \text{ und } q_n = q'\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage gilt.