



8. Übungsblatt zur Vorlesung Informatik III

Aufgabe 1: Unärcodierung

2 Punkte

Die Unärcodierung von natürlichen Zahlen ist eine sehr ineffiziente Darstellung, hat aber den Vorteil dass nur ein einziges Zeichen benötigt wird. Wir verwenden in dieser Vorlesung zur Unärcodierung meinst einen senkrechten Strich und somit ist das leere Wort eine Darstellung der Zahl Null und das Wort $|||| \in \{|\}^*$ eine Darstellung der Zahl Fünf.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik über dem Alphabet $\Sigma = \{ |, +, = \}$ an, die alle Wörter der Form

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m = u_{\text{sum}}$$

erzeugt, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Für $i \in \{1, \dots, m\}$ ist das Teilwort $u_i \in \{|\}^*$ die Unärcodierung einer positiven natürlichen Zahl.
- Was Teilwort u_{sum} ist die Unärcodierung einer natürlichen Zahl.
- Wenn wir das Pluszeichen als Addition von natürlichen Zahlen und das Gleichheitszeichen als Gleichheit von natürlichen Zahlen interpretieren erhalten wir eine korrekte mathematische Aussage.
- Die linke Seite der Gleichung enthält mindestens zwei Summanden, also $m \geq 2$.

Aufgabe 2: ε -freie Grammatik

2 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A, B, C\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow AS \mid AB \mid AA, \\ & A \rightarrow a \mid BB \mid C, \\ & B \rightarrow b \mid \varepsilon, \\ & C \rightarrow a \} \end{aligned}$$

Auf Vorbereitungsblatt 7 wendeten Sie bereits den Algorithmus aus dem Beweis von Satz 3.4 auf \mathcal{G} an und berechneten damit $\text{Nullable}(\mathcal{G}) = \{S, A, B\}$.

Wenden Sie nun die Konstruktion „DEL“ aus der Vorlesung auf die Grammatik \mathcal{G} an. Überspringen Sie dabei Schritt 2, d.h., wenden Sie nicht „SEP“ und „BIN“ an, da \mathcal{G} bereits die entsprechende Form hat.

Aufgabe 3: Kettenregelfreie Grammatik

2 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A, B, C\}$ und

$$P = \{ S \rightarrow A \mid B, \\ A \rightarrow B \mid b, \\ B \rightarrow A \mid C, \\ C \rightarrow AB \mid a \}$$

Wenden Sie die Konstruktion „UNIT“ aus der Vorlesung auf die Grammatik \mathcal{G} an. Halten Sie sich dabei an folgende Anleitung.

- Geben Sie den Graphen für Schritt 2 explizit an.
- Solange Sie auf einen Zyklus treffen (Schritt 3), so wählen Sie zur Elimination (Schritt 4) dasjenige Nichtterminalsymbol, welches zuerst im deutschen Alphabet vorkommt (im Skript: A_1). Geben Sie anschließend die resultierenden Produktionsregeln und erneut den entsprechenden Graphen an.
- Geben Sie explizit eine topologische Sortierung (Schritt 5) an. Annotieren Sie beispielsweise die Knoten im Graphen mit Nummern wie im Skript.
- Geben Sie für Schritt 6 die Produktionsregeln nach jeder äußeren Schleifeniteration an.

Aufgabe 4: CYK-Algorithmus

3 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ in Chomsky-Normalform mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $N = \{S, A, B, C, D\}$ und den folgenden Produktionsregeln.

$$P = \{ S \rightarrow BB \mid CA \mid CD, \\ A \rightarrow 0 \mid DC \mid CA, \\ B \rightarrow CC \mid DB, \\ C \rightarrow 1 \mid CD, \\ D \rightarrow 0 \mid AA \}$$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um das Wortproblem für die Grammatik \mathcal{G} und das Wort $w = 010110$ zu entscheiden. Geben Sie die vollständige Tabelle an, die der Algorithmus produziert.¹ Liegt w in der Sprache von \mathcal{G} ?

¹In der Literatur gibt es zahlreiche Variationen des Algorithmus, die sich im Wesentlichen in der Anordnung der Tabelleneinträge $M_{i,j}$ unterscheiden. Verwenden Sie die Anordnung aus der Vorlesung. Der erste Index gibt die Zeilennummer an, der zweite Index gibt die Spaltennummer an. Die Zeilennummern werden von oben nach unten größer, die Spaltennummern werden von links nach rechts größer.

Aufgabe 5: DEA \rightsquigarrow Typ-3-Grammatik

1+2+1 Punkte

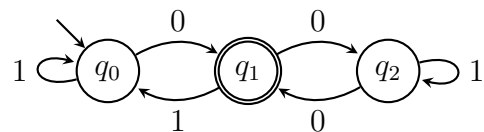
Betrachten Sie die Konstruktion aus der „ \Rightarrow “-Beweisrichtung von Satz 3.13 :Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\text{init}}, F)$ ein DEA. Konstruiere die Typ-3-Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$N = Q$$

$$S = q^{\text{init}}$$

$$P = \{q \rightarrow aq' \mid q, q' \in Q, a \in \Sigma, \delta(q, a) = q'\} \cup \{q \rightarrow \varepsilon \mid q \in F\}$$

- (a) Betrachten Sie den folgenden DEA über dem Alphabet
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- .



Geben Sie eine äquivalente Typ-3-Grammatik an. Verwenden Sie dazu die obige Konstruktion.

- (b) Zeigen Sie das folgende Lemma zu obiger Konstruktion:

$$\tilde{\delta}(q^{\text{init}}, w) = q' \text{ gdw. } q^{\text{init}} \stackrel{*}{\vdash}_{\mathcal{G}} wq'$$

- (c) Zeigen Sie mithilfe des Lemmas, dass
- $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{G})$
- für obige Konstruktion gilt.

Anmerkung: Teilaufgaben (b) und (c) sind für einen beliebigen DEA zu zeigen, nicht nur für denjenigen aus dem Beispiel.