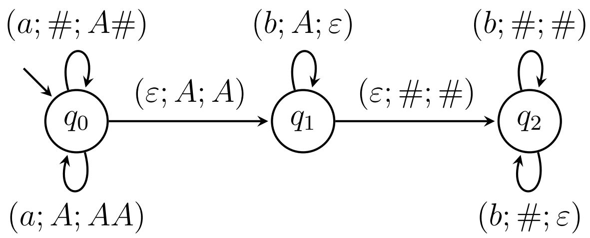
Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 19. Dezember 2017

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Aufgabe 1: Kellerautomaten I 2 Punkte

Betrachten Sie folgenden Kellerautomaten $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, der Menge von Zuständen $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, A\}$, dem Startzustand $q^{\text{init}} = q_0$ und dem Startsymbol des Kellers $Z^{\text{init}} = \#$. Im folgenden Zustandsdiagramm von $\mathcal{K}$ sind Beschriftungen $(x; Z; \gamma)$ von Transitionen für $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$ und $\gamma \in \Gamma^*$ folgendermaßen zu lesen: x ist das Eingabesymbol (oder ε) und Z ist das oberste Kellersymbol, welches nach Ausführung der Transition durch γ an der Spitze des Kellers ersetzt wird.



(a) Akzeptiert $\mathcal{K}$ das Wort $aabbb$? Begründen Sie Ihre Behauptung.

(b) Was ist die von $\mathcal{K}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{K})$?

Aufgabe 2: Kellerautomaten II 2 Punkte

Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, der die folgende Sprache akzeptiert.

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Geben Sie jede Komponente der Struktur $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ an. Sie dürfen die Transitionsfunktion δ durch ein Zustandsdiagramm wie in Aufgabe 1 darstellen.

Aufgabe 3: Mehr Keller – mehr Möglichkeiten 3 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ ein beliebiger Kellerautomat. Lemma 4.2 aus der Vorlesung besagt:

> Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
>
> Wenn $(q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$, dann $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$.

Beweisen Sie dieses Lemma.

Hinweis: Es ist leichter, die folgende allgemeinere Behauptung zu zeigen.

Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, \hat{\gamma} \in \Gamma^*$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn $(q, w, \hat{\gamma}) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$, dann $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, \hat{\gamma}\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$.

Aufgabe 4: CFG $\rightsquigarrow$ NPDA 2 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$ und den folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} P = \{S &\to Aa \mid Bc, \\ A &\to aaAb \mid a, \\ B &\to aBb \mid aA \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

(a) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{K}$, sodass $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{G})$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren[1] (Lemma 4.1).

(b) Geben Sie eine akzeptierende Folge von Konfigurationen in Ihrem Kellerautomaten für das Wort $aaabc$ an.

Aufgabe 5: Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen 3 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}^*$.

$$L = \{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen, dass L nicht kontextfrei ist. Analoge Fälle müssen Sie nicht mehrfach betrachten; geben Sie die Fälle aber explizit an.

[1] Die Konstruktion wurde in der Vorlesung auf Grammatiken in CNF beschränkt, um den Beweis zu vereinfachen. Die Konstruktion funktioniert aber auch für allgemeine kontextfreie Grammatiken. Sie müssen die Grammatik daher nicht erst in CNF bringen.