Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 9. Januar 2019

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Dieses Aufgabenblatt beinhaltet (ausnahmsweise) sowohl das klassische Übungsblatt als auch das Vorbereitungsblatt. Die Aufgaben 1,2,3 und 6 sind klassiche Übungsaufgaben. Die Aufgaben 4 und 5 sind die bisher umfangreichsten Vorbereitungsaufgaben dieser Vorlesung. Sie sollen Sich mit Hilfe dieser mit den grundlegenden Definitionen für Turingmaschinen vertraut machen. Turingmaschinen wurden am 19.12. in der Vorlesung informell beschrieben, Sie finden diese Beschreibung in Kapitel 6.1 des Skiptes wieder. Mit Hilfe dieser Vorbereitungsaufgaben sollen Sie nun selbständig Kapitel 6.2 durcharbeiten. Wir haben uns dafür zu jeder Definition eine Teilaufgabe überlegt.

Aufgabe 1: Mehr Keller – mehr Möglichkeiten „umgedreht“ 1 Punkt

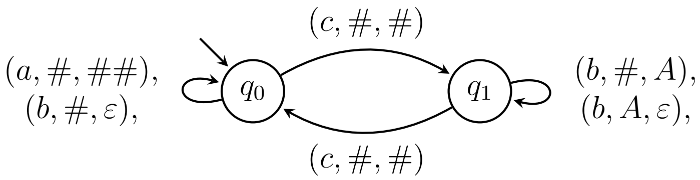
Sei $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta)$ ein beliebiger Kellerautomat. Wenn wir die Implikation in Lemma 4.2 umdrehen, lautet die Aussage:

> Für alle $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
>
> Wenn $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \rhd^n (q', v, \gamma)$, dann $(q, w, Z) \rhd^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$.

Gilt diese Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: NPDA $\rightsquigarrow$ CFG 3 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Kellerautomat $\mathcal{K} = (\Sigma, Q, \Gamma, q_0, \#, \delta)$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, dem Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, A\}$ und den restlichen Komponenten gegeben im folgenden Zustandsdiagramm.



(a) Geben Sie eine Grammatik $\mathcal{G}$ an, sodass $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{K})$ gilt. Verwenden Sie dabei das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren (Lemma 4.4).

(b) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $acbbcb$ in Ihrer Grammatik an.

Aufgabe 3: Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen 1+2 Punkte

(a) Betrachten Sie die beiden kontextfreien Grammatiken $\mathcal{G}_i = (\Sigma, N_i, P_i, S_i)$ für $i = 1, 2$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N_i = \{S_i, A\}$ und den folgenden Regeln.

$$P_1 = \{\ S_1 \to A \mid \varepsilon \\ A \to a \mid AAb\ \}$$

$$P_2 = \{\ S_2 \to aA \\ A \to a \mid aAb\ \}$$

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik, welche die folgende Sprache erzeugt.

$$L(\mathcal{G}_1) \cdot (L(\mathcal{G}_2))^*$$

Verwenden Sie dazu die Konstruktionen aus der Vorlesung (Beweis zu Satz 5.5).

Hinweis: Das Umbenennen von Nichtterminalsymbolen kann helfen, um eine disjunkte Vereinigung zu ermöglichen.

(b) Seien L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen. Ist die Differenz $L_1 \setminus L_2$ kontextfrei?

Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4: Turingmaschinen, Funktion berechnen 0,5+0,5+0,5+0,5+2 Punkte

Betrachten Sie die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\text{init}}, \sqcup, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, $q^{\text{init}} = q_0$, $F = \emptyset$ und δ gegeben durch folgende Turingtafel.

q_0	0	q_0	1	R
q_0	1	q_0	0	R
q_0	$\sqcup$	q_1	$\sqcup$	L
q_1	0	q_1	0	N

(a) Ist $\mathcal{M}$ deterministisch oder nichtdeterministisch (Def 6.1)?

(b) Was sind die Rechenschritte von $\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{M}$ auf die Eingabe 110 angesetzt wird. Formal: Geben Sie eine Folge von Konfigurationen $c_0, \ldots, c_n$ an sodass c_0 die Startkonfiguration q_0110, c_n eine Haltekonfiguration ist und für alle i mit $0 \leq i < n$ $c_i \vdash c_{i+1}$ gilt (Def 6.2, Def 6.3).

(c) Geben Sie eine Eingabe an, auf der $\mathcal{M}$ nicht hält (Def 6.5).

(d) Geben Sie $f_{\mathcal{M}}(110)$ an. (Def 6.6)

(e) Welche partielle Funktion f berechnet die Turingmaschine? Geben Sie sowohl eine umgangssprachliche als auch eine formale Beschreibung der partiellen Funktion f an.

Hinweis: Für undefinierte Ausgaben können Sie den Wert Ihrer partiellen Funktion f entweder ebenfalls undefiniert lassen oder explizit den Wert „undef." zurückliefern.

Aufgabe 5: Turingmaschinen, Sprache akzeptieren 1+1+2 Punkte

Betrachten Sie die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\text{init}}, \sqcup, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_\ell\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup, *\}$, $q^{\text{init}} = q_0$, $F = \{q_1\}$ und δ gegeben durch folgende Turingtafel.

q_0	0	q_1	$*$	R
q_0	1	q_0	1	R
q_0	$*$	q_0	$*$	R
q_1	0	q_1	0	R
q_1	1	q_ℓ	$*$	L
q_1	$*$	q_1	$*$	R
q_ℓ	0	q_ℓ	0	L
q_ℓ	1	q_ℓ	1	L
q_ℓ	$*$	q_ℓ	$*$	L
q_ℓ	$\sqcup$	q_0	$\sqcup$	R

(a) Geben Sie vier verschiedene Wörter mit Länge ≤ 5 an die von $\mathcal{M}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie vier verschiedene Wörter mit Länge ≤ 5 an die von $\mathcal{M}$ nicht akzeptiert werden.

(c) Welche Sprache akzeptiert die Turingmaschine? Geben Sie sowohl eine umgangssprachliche als auch eine formale Beschreibung der Sprache an.

Aufgabe 6: Jordi und die Lichterkette 3 Punkte

Nach vielen Jahren im Einsatz funktioniert die große Lichterkette am Nordpol nicht mehr. Der Weihnachtsmann hat den Elfen Jordi damit beauftragt, diese zu reparieren. Da die Kette zwar endlich, aber sehr lang sein kann und Jordi in der Vorweihnachtszeit sehr beschäftigt ist, hat er Sie um Hilfe gebeten. Mit einer verzauberten Turingmaschine, die als Eingabe die Lichterkette bekommt, sollen Sie alle Fehler beheben. Dabei startet die Maschine am linken Ende der Kette auf der ersten Lampe, ein Stück Kabel wird als $-$, eine funktionstüchtige Lampe als 🕯 und eine defekte Lampe als ▯ dargestellt. Die möglichen Fehlerarten sind:

(a) Eine Lampe kann defekt sein, d.h. statt 🕯 steht ▯ auf dem Band. Ersetzen Sie hier die defekte durch eine funktionierende Lampe.

(b) Ein Stück Kabel kann fehlen, d.h. statt $-$ steht $\sqcup$ auf dem Band. Wie das passieren konnte, weiß Jordi selbst nicht so genau, da das Zeichen $\sqcup$ gar nicht im Eingabealphabet vorkommt.[1] Trotzdem muss die Maschine fehlende Kabel ausbessern. Fügen Sie in diesem Fall ein Stück Kabel ein. Natürlich können auch mehrere Stücke des Kabels hintereinander fehlen. Es kann jedoch keine Lampe fehlen.

Zwei Lampen werden immer von ein bis zwei (möglicherweise defekten) Stücken Kabel getrennt. Die Kette startet und endet mit einer (möglicherweise defekten) Lampe. Formal sieht die Turingmaschine (ohne Zustände und Transitionen) folgendermaßen aus:

$$\tau = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, \emptyset) \text{ mit } \Sigma = \{-, \text{🕯}, \text{▯}\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}, q_0 \in Q$$

Vervollständigen Sie die Maschine, indem Sie Zustände und Transitionen einfügen.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie kein zusätzliches Bandsymbol verwenden dürfen. Die Kette, die *am Ende* auf dem Band steht, darf nicht kürzer oder länger sein als die Eingabe. Die Turingmaschine muss auf allen gültigen Eingaben (d.h. eine möglicherweise defekte Lichterkette) terminieren. Testen Sie Ihre Turingmaschine dazu am besten mit einigen Beispieleingaben. Eine gültige Beispieleingabe und erwartete Ausgabe finden Sie unten.

Eingabe:

...	$\sqcup$	▯	$-$	$\sqcup$	▯	$\sqcup$	$\sqcup$	🕯	$-$	🕯	$\sqcup$	...

Ausgabe:

...	$\sqcup$	🕯	$-$	$-$	🕯	$-$	$-$	🕯	$-$	🕯	$\sqcup$	...

Frohe Feiertage und ein gutes neues Jahr wünschen

Leonard Fichtner, Matthias Heizmann, Tim Krautschneider, Lars Nitzke, Alexander Nutz, Jan Oreans, Johanna Pieper, Andreas Podelski und Jens Rahnfeld

[1] Nur bei dieser „verzauberten“ Turingmaschine kann ein Blank Teil der Eingabe sein. Bei normalen Turingmaschinen, wie wir sie in der Vorlesung kennengelernt haben, ist dies nicht erlaubt.