Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 16. Januar 2018

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Informatik III

Anmerkung: Undokumentierte Turingmaschinen zu verstehen ist ähnlich schwierig wie undokumentierten Programmcode zu verstehen. Immer wenn Sie eine Turingmaschine mit einer nicht offensichtlichen Funktionalität angeben, sollten Sie auch in Textform beschreiben, wie diese Turingmaschine funktioniert.

Aufgabe 1: Flussdiagramme 4 Punkte

Betrachten Sie das Alphabet der Striche $\Sigma = \{I\}$. Wir interpretieren Wörter aus Σ^* als unärcodierte natürliche Zahlen.
Geben Sie für diese Aufgabe jeweils Turingmaschinen als Flussdiagramme an. Verwenden Sie dabei $\sqcup$ als Blank.

(a) Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{++}$ an, die an eine beliebige Eingabe über dem Eingabealphabet $\{I, \#\}$ rechts I anhängt. Außerdem soll der Kopf zurück an die Ausgangsposition bewegt werden, sofern die Eingabe nicht leer war, und ansonsten auf das neu hinzugefügte I bewegt werden.

(b) Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{add}}$ an, die zwei Zahlen, die durch $\#$ getrennt sind, einliest und die erste Zahl zur zweiten Zahl addiert. Die erste Zahl und das Trennzeichen sollen dabei stehenbleiben.

(c) Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{mult}}$ an, die zwei positive Zahlen, die durch $\#$ getrennt sind, multipliziert. Die Ausgabe soll nur das Resultat der Multiplikation sein.

Hinweis: In Unärcodierung wird die Null wird durch das leeren Wort dargestellt. Das Wort $w = \#$ ist also eine gültige Eingabe für $\mathcal{M}_{\text{add}}$.

Aufgabe 2: Mehrband-Turingmaschine 3 Punkte

Geben Sie eine 3-Band-Turingmaschine an, welche die Addition von binärcodierten natürlichen Zahlen durchführt. Verwenden Sie hierfür die Methode die in der Grundschule (auf Dezimalzahlen angewendet) "schriftliche Addition mit Übertrag" genannt wird. Zu Beginn sollen die Operanden getrennt durch $\#$ auf Band 1 stehen.

Wir verallgemeinern hierfür die Flussdiagrammschreibweise auf k-Band-Turingmaschinen, indem wir an jede Kante statt einer Menge von Bandsymbolen eine Menge von k-Tupeln von Bandsymbolen schreiben.
Weiterhin führen wir die folgenden Verallgemeinerungen von Turingmaschinen aus der Vorlesung für drei Bänder ein: $\mathcal{D}_{(x_1,x_2,x_3)}$ ist die Druckmaschine, die auf Band i das Zeichen x_i schreibt. $\mathcal{M}_{(d_1,d_2,d_3)}$ ist die 1-Schritt-Maschine, die auf Band i einen Schritt in Richtung d_i macht, wobei l, r, n jeweils für „links“, „rechts“ oder „stehen bleiben“ steht.

Beispiel: Das folgende Flussdiagramm beschreibt eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{\text{copy}}$, welche die Operanden auf die Bänder 2 und 3 verteilt, Band 1 leert und die Köpfe jeweils auf das erste Blank rechts von den Operanden bewegt.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}_{(\sqcup,0,\sqcup)} \arrow[d, bend left, "\Gamma^3"] & & \mathcal{D}_{(\sqcup,\sqcup,0)} \arrow[d, bend left, "\Gamma^3"] \\
\mathcal{M}_{(l,n,n)} \arrow[r, "\Gamma^3"] & \mathcal{M}_{(r,r,n)} \arrow[u, bend left, "\{(0,\sqcup,\sqcup)\}"] \arrow[r, "\{(\#,\sqcup,\sqcup)\}"] \arrow[d, bend left, "\{(1,\sqcup,\sqcup)\}"] & \mathcal{D}_{(\sqcup,\sqcup,\sqcup)} \arrow[r, "\Gamma^3"] & \mathcal{M}_{(r,n,r)} \arrow[u, bend left, "\{(0,\sqcup,\sqcup)\}"] \arrow[d, bend left, "\{(1,\sqcup,\sqcup)\}"] \\
 & \mathcal{D}_{(\sqcup,1,\sqcup)} \arrow[u, bend left, "\Gamma^3"] & & \mathcal{D}_{(\sqcup,\sqcup,1)} \arrow[u, bend left, "\Gamma^3"]
\end{tikzcd}$$

Ihre Lösung sollte $\mathcal{M}_{\text{copy}}$ verwenden.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Operanden nicht die gleiche Länge haben müssen.

Aufgabe 3: Hintereinanderausführung von Funktionen 2 Punkte

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Seien $\mathcal{M}_f$ und $\mathcal{M}_g$ zwei deterministische TMs mit Bandalphabet Γ. Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die von $\mathcal{M}_f$ berechnete Funktion. Sei $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die von $\mathcal{M}_g$ berechnete Funktion.
Sei $\mathcal{M}_h$ die vom folgenden Flussdiagramm beschriebene TM und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die von $\mathcal{M}_h$ berechnete Funktion.

$$\mathcal{M}_f \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{M}_g$$

Ist h die Hintereinanderausführung von f und g, d.h., gilt für alle $w \in \Sigma^*$, dass $g(f(w)) = h(w)$? Zeigen Sie diese Behauptung oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4: Rastlose Turingmaschinen 2 Punkte

Wir nennen eine deterministische Turingmaschine (DTM) $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\text{init}}, \sqcup, F)$ *rastlos* wenn diese in jedem Schritt den Kopf entweder nach Rechts oder nach Links bewegt, also wenn für alle $q, \in Q$ und für alle $x, \in \Gamma$ kein Tripel der Form (q', x', N) in $\delta(q, x)$ liegt.

Sei $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\text{init}}, \sqcup, F)$ eine beliebige DTM. Kontruieren Sie eine rastlose DTM $\mathcal{M}_{\mathsf{rl}} = (\Sigma, Q_{\mathsf{rl}}\, \Gamma_{\mathsf{rl}}, \delta_{\mathsf{rl}}, q^{\text{init}}_{\mathsf{rl}}, \sqcup, F_{\mathsf{rl}})$ sodass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_{\mathsf{rl}}$ die gleiche Funktion berechnen und die gleiche Sprache akzeptieren.

Es genügt in dieser Aufgabe die Konstruktion anzugeben, sie müssen die Gleichheiten von berechneter Funktion und akzeptierter Sprache nicht beweisen.