Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 24. Oktober 2018

## 1. Vorbreitungsblatt zur Veranstaltung
# Informatik III

Bitte beachten Sie dass in jeder Woche zwei Aufgabenblätter ausgegeben werden; ein *Übungsblatt* und ein *Vorbereitungsblatt*. Das Voreitungsblatt enthält wenige einfache Aufgaben und dient dazu den Stoff der kommenden Vorlesungswoche vorzubereiten. Das Übungsblatt ist umfangreicher und dient dazu den Stoff der aktuellen Vorlesungswoche zu üben. Die Punkte beider Aufgabenblätter werden addiert. Um Papier zu sparen dürfen Sie Ihre Lösungen zu beiden Blätern gerne in einer Abgabe zusammenfassen.

Sie haben Äquivalenzrelationen bereits in „Mathematik II für Studierende der Informatik“[1] kennengelernt. Dieses Vorbereitungsblatt wiederholt die für unsere Veranstaltung relevanten Definitionen.

**Definition:** Sei $X$ eine beliebige Menge. Eine *Relation* $R$ über $X$ ist eine Teilmenge des Produkts $X \times X$ (d.h. $R \subseteq X \times X$). Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- *reflexiv*, wenn $\forall x \in X$: $(x, x) \in R$,
- *symmetrisch*, wenn $\forall x, y \in X$: $(x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R$,
- *transitiv*, wenn $\forall x, y, z \in X$: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R$.

Im Folgenden interessieren wir uns nur für Relationen, die alle drei Eigenschaften erfüllen, aber die folgenden Beispiele sollen helfen, sich mit diesen Eigenschaften vertraut zu machen.

| | reflexiv | symmetrisch | transitiv |
|---|---|---|---|
| „gewinnt“ bei Schere, Stein, Papier[2] | nein | nein | nein |
| $(\mathbb{N}, <)$ | nein | nein | ja |
| $(\mathbb{N}, \neq)$ | nein | ja | nein |
| die leere Relation | nein | ja | ja |
| $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \leq 3\}$ | ja | nein | nein |
| $(\mathbb{N}, \leq)$ | ja | nein | ja |
| direkte genetische Verwandtschaft | ja | ja | nein |
| logische Äquivalenz von Formeln | ja | ja | ja |

Bemerkung: Wir können kein Beispiel für eine nicht leere, symmetrische, transitive Relation finden, die nicht reflexiv ist. Für nicht leere Relationen folgt Reflexivität bereits aus Symmetrie und Transitivität: $(a, b) \in R \overset{\text{sym}}{\Rightarrow} (b, a) \in R \overset{\text{trans}}{\Rightarrow} (a, a) \in R$.

[1] `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/ss17/matheII.html`

[2] Die Gewinnt-Relation, die wir im folgenden $R_{\mathsf{win}}$ nennen, ist eine binäre Relation über der dreielementigen Menge { Schere, Stein, Papier } und wie folgt definiert:

$$R_{\mathsf{win}} = \{\ (\text{Schere, Papier}), (\text{Papier, Stein}), (\text{Stein, Schere})\ \}$$

**Aufgabe 1: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität** 2 Punkte

Begründen Sie alle "nein" Einträge in den Zeilen 2,3,5,6,7 und 8 der obigen Tabelle indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.
Exemplarisch hier die Lösung für die erste Zeile der Tabelle:

nicht reflexiv, da (Stein, Stein)$\notin R_{\mathsf{win}}$

nicht symmetrisch, da (Stein, Papier)$\in R_{\mathsf{win}}$, aber (Papier, Stein)$\notin R_{\mathsf{win}}$

nicht transitiv, da (Stein, Papier)$\in R_{\mathsf{win}}$, (Papier, Schere)$\in R_{\mathsf{win}}$, aber (Stein, Schere)$\notin R_{\mathsf{win}}$

**Definition:** Eine *Äquivalenzrelation* $R$ ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für eine Äquivalenzrelation $R$ und ein $x \in X$ nennen wir die Menge $\{y \in X \mid (y, x) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse* von $x$ und verwenden die Notation $[x]_R$ für diese Menge. Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Relation gemeint ist, dürfen wir das Subskript $\cdot_R$ auch weglassen und schreiben nur $[x]$. Wenn wir eine Äquivalenzklasse mit Hilfe der Notation $[x]_R$ beschreiben, nennen wir $x$ den *Repräsentanten* dieser Äquivalenzklasse. Wir nennen die Anzahl der Äquivalenzklassen von $R$ den *Index* von $R$.

Bemerkung: Zwei Fakten die für eine beliebige Äquivalenzrelation $R$ gelten.

**Fakt 1** Die Äquivalenzklassen von $R$ sind paarweise disjunkt.

**Fakt 2** Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist die Menge $X$.

**Aufgabe 2: Äquivalenzrelation** 2 Punkte

Betrachten Sie die folgende Äquivalenzrelation über der Menge der natürlichen Zahlen, die mit Hilfe der Modulofunktion[3] definiert ist.

$$R_{\mathsf{mod2}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = y \bmod 2\}$$

(a) Geben Sie ein Beispiel für ein Paar von Zahlen, das miteinander in Relation steht.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein Paar von Zahlen, das nicht miteinander in Relation steht.

(c) Beschreiben Sie die Äquivalenzklasse $[7]_R$.

(d) Welchen Index hat $R_{\mathsf{mod2}}$? Begründen Sie Ihre Behauptung.

[3] Die Modulofunktion $\bmod : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei die Funktion die den Rest einer ganzzahligen Division liefert. Es gilt also z. B. $19 \bmod 3 = 1$.