Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 21. November 2018

5. Vorbereitungsblatt zur Veranstaltung

Informatik III

Für den Beweise des Satzes von Klenee (Satz 2.12) wollen wir zu einem beliebigen DEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\mathsf{init}}, F)$ einen regulären Ausdruck konstruieren der die Sprache $L(\mathcal{A})$ beschreibt. Zur Vorbereitung dieses Beweises definierten wir (Def. 2.25) die *Sprache eines Zustandes q* als $L_q = \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q, w) \in F\}$.
Die Sprache eines Zustandes zu bestimmen ist genauso schwierig wie die Sprache eines DEA zu bestimmen. Wir im Kapitel zu regulären Sprachen eine systematische Methode zum Lösen dieser Aufgabe kennenlernen.
Unsere Methode basiert auf Gleichungssysteme für Sprachen und wir wollen uns zunächst mit diesen vertraut machen.

Aufgabe 1: Gleichungen 2 Punkte

(a) Sei $\Sigma = \{0, 1\}^*$. Betrachten Sie die Sprachen

$$\begin{aligned} L_{\mathsf{even}} &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist gerade. }\} \\ L_{\mathsf{odd}} &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist ungerade. }\} \end{aligned}$$

und die folgende Gleichung mit der Unbekannten X.

$$L_{\mathsf{even}} = X \cdot L_{\mathsf{odd}} \cup \{\varepsilon\}$$

Finden Sie eine Lösung, also eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sodass die Gleichung gilt wenn Sie X durch L ersetzen. Zeigen Sie dass Ihre Lösung nicht eindeutig ist, indem Sie eine weitere von L verschiedene Lösung angeben.[1]

(b) Finden Sie eine Lösung für die folgende Gleichung mit der Unbekannten X.

$$X = \{b, \varepsilon\} \cdot X \cup \{a\}$$

Zeigen Sie wieder dass Ihre Lösung nicht eindeutig ist indem Sie noch eine weitere Lösung angeben.

[1] Es stelle sich heraus dass diese Aufgabe nicht lösbar ist da zur gegebenen Gleichung keine Lösung existiert. Wir bitten dies zu entschuldigen und haben uns folgene Regelung überlegt:

(i) Die Punktzahl bei dieser Aufgabe bleibt unverändert.

(ii) Jeder Vorlesungsteilnehmer bekommt einen Bonuspunkt.

(iii) Der Punkt in Aufgabe 1a wird nur für die Lösungen vergeben die darlegen warum diese Aufgabe unlösbar ist.

In der Vorlesung nahmen wir ohne Einschränkung an dass die Menge der Zustände des DEAs $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ sei. Unser Ziel ist nun ein Gleichungssystem mit Variablen $X_{q_0}, \ldots, X_{q_n}$ zu erstellen sodass jeweils L_{q_i} eine Lösung für X_{q_i} ist und es keine weiteren Lösungen gibt.
Zur Herleitung dieses Gleichungssystemes formten wir die Gleichung aus Def. 2.25 in drei Schritten wie folgt um.

$$\begin{aligned}
L_{q_i} &= \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q_i, w) \in F\} \\
&= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\}\{w' \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(\delta(q_i, a), w') \in F\} \\
&= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\} L_{\delta(q_i, a)} \\
&= \{\varepsilon \mid q_i \in F\} \cup \bigcup_{j=0}^{n} \underbrace{\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}}_{A_{ij} \not\ni \varepsilon} L_{q_j}
\end{aligned}$$

Die Sprachen L_{q_i} sind unsere Unbekannten und werden durch Variablen X_{q_i} ersetzt. Die A_{ij} werden die Koeffizienten unseres Gleichungssystems.

Aufgabe 2: Gleichungssysteme für Automaten 2 Punkte

Für den unten angefügten Automaten erhalten wir das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
X_{q_0} &= A_{00} \cdot X_{q_0} \cup A_{01} \cdot X_{q_1} \\
X_{q_1} &= A_{10} \cdot X_{q_0} \cup A_{11} \cdot X_{q_1}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die vier Koeffizienten A_{00}, A_{01}, A_{10} und A_{11}.