



## 11. Vorbereitungsblatt zur Veranstaltung Informatik III

### Aufgabe 1: Eigenschaften von Funktionen

2 Punkte

Aus Ihrem bisherigen Studium kennen Sie bereits die folgenden Definitionen: Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt

- *injektiv*, wenn gilt:  $\forall x \in X, y \in Y : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ,
- *surjektiv*, wenn gilt:  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ ,
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an, die

- Weder injektiv noch surjektiv ist,
- injektiv aber nicht surjektiv ist,
- surjektiv aber nicht injektiv ist,
- bijektiv ist.

### Aufgabe 2: Standardnummerierung

2 Punkte

Sei  $\text{bin} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  die Decodierung von Binärstrings (Wörtern über  $\{0, 1\}$ ) in natürliche Zahlen.

$$\text{bin}(a_0 \dots a_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_1 \dots a_n = \varepsilon \\ \sum_{i=0}^n a_i \cdot 2^{n-i} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wollen eine Abbildung die geeignet ist um alle Binärstrings durchzunummerieren. Wir definieren dafür die *Standardnummerierung*  $\text{stdnum} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  die folgt.

$$\text{stdnum}(a_1 \dots a_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_1 \dots a_n = \varepsilon \\ 2^n - 1 + \text{bin}(a_1 \dots a_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Definition basiert auf den folgenden Überlegungen:

- Nummeriere alle Binärstrings der Länge nach; bei gleicher Länge gibt die Funktion  $\text{bin}$  die Reihenfolge vor.
- Es gibt  $2^n$  Binärstrings der Länge  $n$ .

- Für einen Binärstring der Länge  $n$  gibt es also  $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$  Binärstrings mit kürzerer Länge.
- (a) Zeigen Sie zunächst dass `bin` ungeeignet ist um alle Binärstrings durchzunummerieren. Geben Sie dafür zwei Binärstrings an die von `bin` auf die gleiche natürliche Zahl abgebildet werden.
- (b) Geben Sie `bin(110)` und `stdnum(110)` in Dezimalschreibweise an.
- (c) Welcher Binärstring wird von `stdnum` auf die natürliche Zahl 32 abgebildet?