



12. Vorbereitungsblatt zur Veranstaltung Informatik III

Definition 7.5 aus der Vorlesung lautet:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Die *charakteristische Funktion* $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ ist wie folgt definiert:

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{falls } w \notin L \end{cases}$$

Die Charakteristische Funktion stellt also einen Zusammenhang zwischen Sprachen und Funktionen her.

Aufgabe 1: Charakteristische Funktion

1 Punkt

Sei $\text{mod}_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$ die Funktion die gerade Zahlen auf 0 und ungerade Zahlen auf 1 abbildet. Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ sodass die Hintereinanderausführung $\text{mod}_2 \circ \text{bin}$ die charakteristische Funktion für L ist.

Aufgabe 2: Charakteristische Funktion und Entscheidbarkeit¹

2 Bonuspunkte

Satz 7.7 aus der Vorlesung Satz zeigt uns nun einen direkten Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben einer Turingmaschine, dem Berechnen von Funktionen und dem Akzeptieren von Wörtern. Der Satz besagt:

Sei $\{0, 1\} \subseteq \Sigma$. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn die charakteristische Funktion χ_L berechenbar ist.

Zeigen Sie diese Aussage.

Def. 7.7 aus der Vorlesung lautet.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *semi-entscheidbar*, falls es eine TM gibt, die L akzeptiert.

Aufgabe 3: Semi-Entscheidbarkeit

2 Punkte

Betrachten Sie die folgende Sprache.

$$L_{42} = \{ \ulcorner \mathcal{M} \urcorner \mid \text{für jede Eingabe } w \text{ der Länge } 42 \text{ hält } \mathcal{M} \text{ angesetzt auf } w \}$$

¹ Diese Aufgabe war zunächst Teil des klassischen Übungsblattes. Da ich in der Vorlesung weniger weit kam als erwartet, habe ich diese Aufgabe dort entfernt. Da diese Aufgabe nach dem Lesen der Definition machbar sein sollte habe ich sie hier hinzugefügt. Es gibt nur aus diesem Grund Bonuspunkte, die Aufgabe ist ansonsten genauso schwierig und relevant wie jede andere Übungsaufgabe.

Diese Sprache ist nicht entscheidbar. Es gibt also keine TM die diese Sprache akzeptiert und immer hält. Wir wollen nun zeigen dass wir aber eine TM für L_{42} finden können wenn wir auf das Halten verzichten dürfen.

Beschreiben Sie eine Turingmaschine \mathcal{M}_{42} , die alle Wörter in L_{42} akzeptiert und für alle anderen Wörter nicht hält.

Hinweis: Verwenden Sie die universelle TM mehrfach.