Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 30. Januar 2019

13. Vorbereitungsblatt zur Veranstaltung

Informatik III

Zunächst wollen wir den Begriff des *haltens* auch für nichtdeteriministische TMs definieren. Außerdem machen wir Definitionen zum Zeit- und Speicherplatzbedarf einer TM.

Definition Sei $\mathcal{M}$ eine TM mit Eingabealphabet Σ und Rechenschrittrelation $\vdash$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Folge von Konfigurationen $u_0 q_0 v_0, \ldots, u_n q_n v_n$, sodass $u_0 q_0 v_0$ eine Startkonfiguration ist, eine Berechnung von $\mathcal{M}$ in n Schritten wenn $u_i q_i v_i \vdash u_{i+1} q_{i+1} v_{i+1}$ für alle i mit $0 \leq i < n$ gilt. Die *Anzahl der benutzten Bandzellen* dieser Berechnung ist $|u_n| + |v_n|$. Wir nennen eine unendliche Folge von Konfigurationen $u_0 q_0 v_0, u_1 q_1 v_1, \ldots$, sodass $u_0 q_0 v_0$ eine Startkonfiguration ist, eine *unendliche Berechnung* von $\mathcal{M}$ wenn $u_i q_i v_i \vdash u_{i+1} q_{i+1} v_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sagen $\mathcal{M}$ *hält* auf Eingabe w wenn es keine unendliche Berechnung mit Startkonfiguration $q^{\mathsf{init}} w$ gibt.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und $\mathcal{M}$ eine TM mit Eingabealphabet Σ.

- $\mathcal{M}$ hat *Zeitkomplexität* $f(n)$, falls $\forall w \in \Sigma^*$ mit Länge n gilt: $\mathcal{M}$ hält auf Eingabe w für jede Berechnung in höchstens $f(n)$ Schritten.
- $\mathcal{M}$ hat *Platzkomplexität* $f(n)$, falls $\forall w \in \Sigma^*$ mit Länge n gilt: Wenn $\mathcal{M}$ auf w angesetzt wird, benutzt jede Berechnung höchstens $f(n)$ Bandzellen.

Als nächstes klassifizieren wir Sprachen bezüglich ihres Zeit- und Platzbedarfs.

Definition Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion.

$$\begin{aligned}
\mathrm{DTIME}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid\ & \text{Es gibt det. Mehrband-TM } \mathcal{M}\text{, sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
& \mathcal{M} \text{ hat Zeitkomplexität } f(n)\} \\
\mathrm{NTIME}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid\ & \text{Es gibt nichtdet. Mehrband-TM } \mathcal{M}\text{, sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
& \mathcal{M} \text{ hat Zeitkomplexität } f(n)\} \\
\mathrm{DSPACE}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid\ & \text{Es gibt det. Mehrband-TM } \mathcal{M}\text{, sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
& \mathcal{M} \text{ hat Platzkomplexität } f(n)\} \\
\mathrm{NSPACE}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid\ & \text{Es gibt nichtdet. Mehrband-TM } \mathcal{M}\text{, sodass } L(\mathcal{M}) = L \text{ und} \\
& \mathcal{M} \text{ hat Platzkomplexität } f(n)\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1: DTIME 2 Punkte

(a) Geben Sie eine Sprache $L \in \mathrm{DTIME}(42)$ an. Begründen Sie Ihre Behauptung indem Sie eine TM mit Zeitkomplexität $f(n) = 42$ konstruieren.

(b) Geben Sie eine Sprache L an, die in DTIME$(n+1)$ aber nicht in DTIME(n) liegt. Begründen Sie Ihre Behauptung indem Sie eine TM mit Zeitkomplexität $f(n) = n+1$ angeben. Begründen Sie außerdem kurz (ca. 1-2 Sätze) warum Ihre Sprache nicht von einer TM mit Zeitkomplexität[1] $f(n) = n$ akzeptiert werden kann.

....Lösung.......................................

(a) Wähle ein beliebiges Alphabet und $L = \emptyset$. Die Sprache L wir von der TM $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F)$ mit $Q = \{q^{\mathsf{init}}\}$, $F = \{\}$ und einer überall undefinierten Transitionsfunktion (also leerer Turingtabelle) akzeptiert. Diese TM hat Zeitkomplexität $f(n) = 0$. (Also egal wie lang die Eingabe, die TM hält immer nach 0 Schritten, da die Startkonfiguration eine Haltekonfiguration ist.

(b) Betrachte das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und wähle für L die Sprache die durch den regulären Ausdruck a^* beschrieben wird.

- Die Sprache L wird akzeptiert von der TM $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \Gamma, \delta, q^{\mathsf{init}}, \sqcup, F)$ mit $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, $q^{\mathsf{init}} = q_1$, $F = \{q_2\}$, deren Transitionsfunktion durch die folgende Turingtabelle beschrieben ist.

q_1	a	q_1	a	R
q_1	$\sqcup$	q_2	$\sqcup$	N

  Diese TM hat Zeitkomplexität $f(n) = n+1$ da höchstens für jedes Zeichen der Eingabe und für ein Blank ein Schritt gemacht wird. Somit gilt $L \in$ DTIME$(n+1)$.

- Es gibt keine TM mit Zeitkomplexität $f(n) = n$ die L akzeptiert.
  Eine DTM, die angesetzt auf a^{42} nach 42 Schritten in eine Haltekonfiguration geht und akzeptiert müsste auch angesetzt auf $a^{42}b$ in eine Haltekonfiguration geht und akzeptieren. (Alternativ könnte man sich überlegen dass für eine TM mit dieser Zeitkomplexität bereits die Startkonfiguration eine Haltekonfiguration sein muss, da $\varepsilon \in L$ gilt.)

Aufgabe 2: NTIME und NSPACE 1 Punkt

In der Vorlesung vom 19. Dezember wurde die deterministische Turingmaschine $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ vorgestellt. Diese akzeptiert die Sprache der Palindrome L_{pal} über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ hat den Startzustand q_s, das Blanksymbol $\sqcup$, einen einzigen akzeptierenden Zustand q_e und die folgenden Turingtabelle.

[1] Die original Aufgabenstellung forderte hier fälschlicherweise $f(n) = 42$. Wir bitten dies zu entschuldigen und haben uns folgende Regelung überlegt:

(i) Die Punktzahl bei dieser Aufgabe bleibt unverändert.

(ii) Jeder Vorlesungsteilnehmer bekommt einen Bonuspunkt. Dieser wird nicht notwendigerweise vom Tutor auf dem Übungsblatt vermerkt sondern am Semesterende automatisch hinzugefügt.

q_s	$\sqcup$	q_e	$\sqcup$	N
q_s	0	q_0	$\sqcup$	R
q_s	1	q_1	$\sqcup$	R
q_0	0	q_0	0	R
q_0	1	q_0	1	R
q_0	$\sqcup$	q_0'	$\sqcup$	L
q_1	0	q_1	0	R
q_1	1	q_1	1	R
q_1	$\sqcup$	q_1'	$\sqcup$	L
q_0'	0	q_l	$\sqcup$	L
q_1'	1	q_l	$\sqcup$	L
q_l	0	q_l	0	L
q_l	1	q_l	1	L
q_l	$\sqcup$	q_s	$\sqcup$	R

Wählen Sie zwei Funktionen $f_t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $f_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $L_{\mathsf{pal}} \in \text{NTIME}(f_t(n))$ und $L_{\mathsf{pal}} \in \text{NSPACE}(f_s(n))$ gilt. Begründen Sie Ihre Behauptung kurz. Verwenden Sie zur Begründung keine andere TM als $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$.

.... Lösung .... Die TM $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ ist zwar deterministisch, doch da jede DTM auch eine NTM ist (bzw. da für alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Inklusion $\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n))$ und die Inklusion $\text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n))$ gilt) dürfen wir mit $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ argumentieren.

- Wähle $f_t(n) = n \cdot (n + 2) + 1$.

  Wird die Eingabe akzeptiert, läuft $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ abwechselnd von links nach rechts und von rechts nach links über die Eingabe. In jeder Runde wird ein Zeichen der Eingabe gelöscht (daher Faktor n). In jeder Runde wird höchstens ein Schritt pro Zeichen der Eingabe und höchstens zwei Schritte für Blanksymbole am Rand gemacht (daher Faktor $n + 2$). Am Ende wird ein Schritt gemacht um in eine Haltekonfiguration zu gelangen. Wird die Eingabe nicht akzeptiert, gelangt $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ schon früher in eine Haltekonfiguration.

- Wähle $f_s(n) = n + 2$.

  Die TM $\mathcal{M}_{\mathsf{pal}}$ benutzt höchstens die Bandzellen der Eingabe und die Blanksymbole rechts und links davon.

Hinweis: Beide Funktionen wurden für eine (aus Sicht des Autors) einfachere Argumentation „unnötig“ großzügig gewählt.

Aufgabe 3: $\mathcal{O}$-Notation 2 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir das aus der Informatik 2 Vorlesung bekannte $\mathcal{O}$-Symbol der Bachmann–Landau-Notation in Erinnerung rufen.

Definition Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, k \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq k \cdot g(n)\}$$

Betrachten Sie die folgenden Funktionen $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $i \in \{1, \dots 6\}$

$$g_1(n) = 0, \qquad g_2(n) = 1, \qquad g_3(n) = \begin{cases} 42 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 23 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g_4(n) = n^2, \qquad g_5(n) = n^2 + n + 100, \qquad g_6(n) = 2^n$$

Füllen Sie die folgenden Tabellen aus. Tragen Sie dabei in eine Tabellenzelle ein "$\in$" Symbol ein wenn $g_j \in \mathcal{O}(g_i)$ für das entsprechende Paar (Funktion/Menge) gilt und tragen Sie "$\notin$" ein wenn statt dessen $g_j \notin \mathcal{O}(g_i)$ gilt.
Für jede komplett korrekt ausgefüllte Tabelle gibt es einen Punkt. Für jede Tabelle mit einem falschen oder fehlenden Eintrag gib es einen halben Punkt. Für eine Tabelle mit mehr als einem falschen/fehlenden Eintrag gibt es keine Punkte.

	$\mathcal{O}(g_1)$	$\mathcal{O}(g_2)$	$\mathcal{O}(g_3)$
g_1			
g_2			
g_3			

	$\mathcal{O}(g_4)$	$\mathcal{O}(g_5)$	$\mathcal{O}(g_6)$
g_4			
g_5			
g_6			

.... Lösung ....

	$\mathcal{O}(g_1)$	$\mathcal{O}(g_2)$	$\mathcal{O}(g_3)$
g_1	$\in$	$\in$	$\in$
g_2	$\notin$	$\in$	$\in$
g_3	$\notin$	$\in$	$\in$

	$\mathcal{O}(g_4)$	$\mathcal{O}(g_5)$	$\mathcal{O}(g_6)$
g_4	$\in$	$\in$	$\in$
g_5	$\in$	$\in$	$\in$
g_6	$\notin$	$\notin$	$\in$