Prof. Dr. Andreas Podelski
Dr. Matthias Heizmann
Alexander Nutz

Abgabe: 6. Februar 2019

14. Vorbereitungsblatt zur Veranstaltung
Informatik III

Aufgabe 1: Aussagenlogik 1 Punkt

Betrachten Sie das folgenden Lemma aus dem Vorlesungsskript.

Lemma 8.8 Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine aussagenlogische Formel $G(A_1, \ldots, A_k)$, sodass $|G(A_1, \ldots, A_k)| \in \mathcal{O}(k^2)$ und

$$G(A_1, \ldots, A_k) = 1 \text{ gdw. } \exists j \in \{1, \ldots k\} : A_j = 1 \text{ und } \forall i \in \{1, \ldots k\} : i \neq j \rightarrow A_i = 0$$

Konstruieren Sie für $k = 3$ solch eine Formel. Beschreiben Sie die Formel als Wort der Sprache $L(\mathcal{G}_{\mathsf{AL}})$ (siehe Def. 8.3), wobei zur Vereinfachung in dieser Aufgabe innerhalb eines Klammernpaares auch Konjunktionen und Disjunktionen mit mehr als zwei Argumenten erlaubt sein sollen.

In der letzten Vorlesungswoche wollen wir nochmal Kellerautomaten betrachten. Wir definieren einen *Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen* als 7-Tupel

$$\mathcal{E} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta, F)$$

mit den Komponenten $\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta$ wie für einen gewöhnlichen Kellerautomaten und $F \subseteq Q$ als die Menge der akzeptierenden Zustände.

Weiterhin definieren wir das Akzeptanzverhalten folgendermaßen:

Eine Konfiguration (q, w, γ) eines Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen ist *akzeptierend*, falls $q \in F$ und $w = \varepsilon$. Die von einem Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}$ *akzeptierte Sprache* ist

$$L(\mathcal{E}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \gamma \in \Gamma^* : (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \rhd^* (q, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Hierbei ist $\rhd$ die Schrittrelation genau wie für gewöhnliche Kellerautomaten.

Wir nennen sowohl einen gewöhnlichen Kellerautomaten als auch einen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen *deterministisch*, wenn für alle $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$ gilt, dass $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$.

Aufgabe 2: Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen 2 Punkte

Betrachten Sie den Kellerautomaten $\mathcal{K}_{\mathsf{pal}} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\mathsf{init}}, Z^{\mathsf{init}}, \delta)$ aus Bsp. 4.1 der die Sprache der Palindrome über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ akzeptiert und wie folgt definiert war.

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \{0, 1, \#\} && \text{Kelleralphabet} \\
Q &= \{q_0, q_1\} && \# \mathrel{\hat{=}} \text{Kellerbodensymbol} \\
\delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, aZ)\} && \text{für alle } a \in \{0, 1\}, Z \in \Gamma \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z) &= \{(q_1, Z)\} \\
\delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) &= \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

(a) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen $\mathcal{E}_{\mathsf{pal}}$ sodass die Gleichheit der Sprachen $L(\mathcal{E}_{\mathsf{pal}}) = L(\mathcal{K}_{\mathsf{pal}})$ gilt.

(b) Ist $\mathcal{K}_{\mathsf{pal}}$ deterministisch?

Aufgabe 3: Deterministisch kontextfreie Sprachen 2 Bonuspunkte

Wir nennen eine Sprache L *deterministisch kontextfrei*, wenn es einen deterministischen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen gibt der L akzeptiert.

Zeigen Sie dass die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n.m \in \mathbb{N} \text{ und } m > n\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ deterministisch kontextfrei ist, indem Sie einen deterministischen Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen konstruieren der L akzeptiert. Ein Beweis dass der von Ihnen konstruierte Automat die Sprache L akzeptiert ist in dieser Aufgabe nicht erforderlich.